



# Cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés lisses

Olivier Gabriel

## ► To cite this version:

Olivier Gabriel. Cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés lisses. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2011. Français. NNT: . tel-00629022

**HAL Id: tel-00629022**

**<https://theses.hal.science/tel-00629022>**

Submitted on 4 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Denis DIDEROT – Paris VII

---

École Doctorale Paris Centre (ED386)

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Olivier GABRIEL**

---

## Cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés lisses

---

co-dirigée par Emmanuel GERMAIN et Andrzej ZUK.

Soutenue le 27 septembre 2011 devant le jury composé de :

M. Emmanuel GERMAIN	Université de Caen
M. Michael PUSCHNIGG	Institut de Mathématiques de Luminy
M. Thomas SCHICK	Université de Göttingen
M. Georges SKANDALIS	Université Denis DIDEROT – Paris VII
M. Jean-Louis TU	Université Paul VERLAINE – Metz
M. Andrzej ZUK	Université Denis DIDEROT – Paris VII

École doctorale Paris centre Case 188  
4 place Jussieu  
75 252 Paris cedex 05

Institut de Mathématiques de Jussieu  
175, rue du chevaleret  
75 013 Paris

# Remerciements

Les remerciements constituent sans doute la partie la plus lue d'une thèse de mathématiques pures, faut-il en déduire qu'il s'agit de la partie la plus importante ? Quoi qu'il en soit, c'est avec un grand plaisir que je remercie mes deux directeurs de thèse, Andrzej ZUK et Emmanuel GERMAIN. Merci tout d'abord de m'avoir accepté en thèse et ensuite de m'avoir encadré pendant toutes ces années. Merci ensuite pour votre patience, car il n'était pas toujours facile de diriger quelqu'un d'opiniâtre comme moi !

Toute ma gratitude va à Georges SKANDALIS, pour ses conseils toujours avisés. Je le remercie de m'avoir fait profiter de son immense culture mathématique et de sa hauteur de vue. Je suis par ailleurs toujours impressionné par sa disponibilité incroyable au regard de ses responsabilités administratives. . .

Je suis reconnaissant à toute l'équipe Algèbre d'Opérateurs de m'avoir fourni un cadre de travail agréable et stimulant. Merci en particulier à Étienne BLANCHARD, Jean-Luc SAUVAGEOT et Stéphane VASSOUT pour le temps qu'ils m'ont consacré au cours des années passées ainsi qu'à Miguel BERMUDEZ et Frédéric PAUGAM pour le groupe de travail « mathématiques de la physique moderne » qui m'a beaucoup appris.

Paul GAUDUCHON, mon « parrain » du CMLS, continue à m'accorder son attention malgré mon changement d'orientation mathématiques. Ses explications concernant les structures différentielles exotiques sont un repère précieux concernant le « cas commutatif ».

Beatriz ABADIE et Jean-Louis TU ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et je les en remercie profondément. Je n'oublie pas non plus Michael PUSCHNIGG et Thomas SCHICK qui me font l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Enfin, ce travail n'aurait pas pu se concrétiser sans le soutien administratif de M<sup>mes</sup> WASSE et DUPOUY. Je suis reconnaissant pour la gentillesse et la disponibilité qu'elles mettent dans leur travail.

Le Bureau Des Doctorants (BDD) a joué un rôle important durant mon séjour à Chevaleret et je me rappelle avec émotion du temps passé avec les anciens (Cécile, Juliette, Benjamin, Manu, Nabil). Ensuite, de nouveaux membres du BDD sont apparus puis ont pris le relais : c'était le signe inmanquable que le moment était venu pour moi de terminer cette thèse ! Anciens et nouveaux, nous avons passé pas mal de temps à travailler pour l'ensemble des doctorants, mais c'était (presque) toujours un plaisir – même dans le stress du déménagement.

Une mention spéciale pour Martin pour toutes nos discussions mathématiques et autres qui ont été si enrichissantes – et même fécondes. Nous avons déjà écrit un article ensemble mais j'espère bien qu'il ne s'agit que du premier d'une longue série!

Le bureau 7C8 a été mon repaire pendant un long moment et j'ai une pensée pour mes anciens collègues de bureau, tout particulièrement pour Lara, Clémence et Abed, qui ont commencé leurs thèses en même temps que moi et pour Ismaël qui m'a beaucoup (tout ?) appris. J'ai également eu beaucoup de plaisir à côtoyer les nouveaux du 7C8 avant mon exil tardif au troisième étage mais je n'oublie pas pour autant les anciens du 7C12 et plus généralement les thésards du septième avec lesquels j'ai partagé tant de déjeuners, cafés, thés et débats!

Pour ne pas sombrer dans la nostalgie, je vais m'arrêter là et présenter toutes mes excuses aux (nombreuses) personnes que je n'ai pas mentionnées par leur nom dans ces quelques lignes...

Comme il y a une vie en dehors du bureau, je voudrais également remercier Agatouchka qui me fera toujours rire par son enthousiasme pétillant, David pour toutes nos parties de Go et le reste, Ariane, Isabelle, Cyprien et David pour leurs discussions toujours intéressantes et renouvelées, Jeanne pour son énergie et son (trop d'?) enthousiasme, Denis et Michel qui m'ont fourni des lieux favorables à la réflexion et à la détente avant la soutenance, mon frère qui est allergique aux maths ainsi que ma maman et mon papa sans lesquels je ne serai pas là!

Une mention toute particulière pour Véro : à Berkeley ou à Paris, une thèse est toujours un (très) long et difficile moment à passer. Les (trop) rares discussions que nous avons eues pendant ces quatre ans ont toujours été d'un grand réconfort pour moi.

Pour conclure, un grand merci à ma douce, Franziska. Tu as réussi à mener de front une licence (et maintenant un master!), une thèse (la tienne) et une autre (la mienne) tout en restant toujours disponible (sur Facebook, en particulier)... Pour cette thèse, tu y croyais toujours même lorsque j'étais au fond du désespoir. Tu as toujours été auprès de moi, même lorsque j'étais « au pays des maths » et je ne saurai jamais assez t'en remercier!

# Cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés lisses

## Résumé

Cette thèse de doctorat est consacrée à la *cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés*. Ces derniers sont des  $C^*$ -algèbres construites à partir d'un bimodule hilbertien. Notre étude s'organise en deux axes complémentaires : un résultat général valable pour les *produits croisés généralisés lisses à croissance modérée* et un résultat spécifique aux *variétés de Heisenberg quantiques*.

Dans un premier temps, nous introduisons une classe de « versions lisses » des produits croisés généralisés, que nous appelons « produits croisés généralisés lisses à croissance modérée ». Notre premier résultat est que sur ces algèbres, les foncteurs  $\mathcal{K}$ -stables, invariants sous difféotopie et semi-exacts (comme la cohomologie cyclique périodique) donnent naissance à un hexagone exact analogue à la suite de Pimsner-Voiculescu. Pour prouver cette propriété, nous nous appuyons sur les travaux de CUNTZ et tout particulièrement sur la notion de *contexte de Morita*.

Dans un second temps, nous illustrons cette construction en l'appliquant aux *variétés de Heisenberg quantiques* (QHM). En tirant profit de l'action du groupe de Heisenberg  $H_3$  sur les QHM, nous construisons des représentants explicites de la  $K$ -théorie et de la cohomologie cyclique. Nous pouvons alors effectuer des calculs explicites d'appariements de Chern-Connes. En combinant ces calculs avec la suite exacte à 6 termes de la première partie, nous construisons des bases explicites de la cohomologie cyclique périodique des QHM. Notre second résultat est donc une description relativement complète et totalement explicite de la  $K$ -théorie et de la cohomologie cyclique périodique des QHM.

## Mots-clefs

Cohomologie cyclique périodique, groupe de Heisenberg, algèbres de Cuntz-Pimsner, produit croisé généralisé, variétés de Heisenberg quantiques.

# Periodic Cyclic Cohomology for Smooth Generalized Crossed Products

## Abstract

This Ph.D. thesis focuses on *periodic cyclic cohomology* for *generalized crossed products*. They are  $C^*$ -algebras constructed out of a Hilbert bimodule. This dissertation is divided into two complementary parts: a general result for *tame smooth generalized crossed products* and a specific result for *quantum Heisenberg manifolds*.

In the first part, we introduce a class of “smooth versions” of generalized crossed products, which we call “tame smooth generalized crossed products”. We then prove that for these algebras, the  $\mathcal{K}$ -stable diffeotopy-invariant and half-exact functors (such as periodic cyclic cohomology) fit into a 6-term exact sequence similar to the Pimsner-Voiculescu exact sequence. To prove this result, we will rely on work by Cuntz, including *Morita contexts*.

In the second part, we illustrate the previous construction through the example of *Quantum Heisenberg Manifolds* (QHM). Using the action of the Heisenberg group  $H_3$  on QHM, we build explicit representatives of the  $K$ -theory and cyclic cohomology of QHM. This enables us to perform explicit computations of Chern-Connes pairings. These calculations together with the 6-term exact sequence of the first part yield explicit bases for the periodic cyclic cohomology of QHM. Hence, our second result is a fairly comprehensive and totally explicit description of  $K$ -theory and periodic cyclic cohomology for QHM.

## Keywords

Periodic cyclic cohomology, Heisenberg group, Cuntz-Pimsner algebras, generalized crossed product, quantum Heisenberg manifolds.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>Hypothèses permanentes et notations</b>	<b>15</b>
<b>1 Contexte : définitions et résultats connus</b>	<b>17</b>
1.1 Espaces localement convexes . . . . .	17
1.1.1 Définitions . . . . .	17
1.1.2 Produits tensoriels . . . . .	18
1.1.3 Algèbres localement convexes . . . . .	20
1.1.4 Action de jauge et coefficients de Fourier . . . . .	21
1.2 Algèbres de Toeplitz et produits croisés généralisés . . . . .	22
1.2.1 Modules hilbertiens . . . . .	22
1.2.2 $C^*$ -correspondances et algèbres de Toeplitz . . . . .	24
1.2.3 Bimodules hilbertiens et produits croisés généralisés . . . . .	28
1.3 Groupes de Lie et cohomologie cyclique . . . . .	31
1.3.1 Groupes de Lie et algèbres localement convexes . . . . .	31
1.3.2 Cohomologie cyclique et génération de cocycles . . . . .	32
1.3.3 Connexions . . . . .	34
1.3.4 Produits croisés généralisés lisses . . . . .	37
<b>2 Résultats généraux : hexagone exact</b>	<b>41</b>
2.1 Cadre général . . . . .	42
2.1.1 Préliminaires . . . . .	42
2.1.2 Contextes de Morita . . . . .	43
2.1.3 Quasi-homomorphismes . . . . .	44
2.1.4 Algèbre de Toeplitz lisse . . . . .	47
2.1.5 Foncteurs semi-exacts et hexagones . . . . .	48
2.2 Suite exacte à 6 termes . . . . .	49
2.2.1 Hypothèses et définitions . . . . .	49
2.2.2 Extension d'algèbres localement convexes . . . . .	50
2.2.3 Identification du noyau . . . . .	52
2.2.4 Algèbres de Toeplitz et algèbres de base . . . . .	56
2.2.5 Synthèse . . . . .	60



<b>3 Exemple : variétés de Heisenberg quantiques</b>	<b>63</b>
3.1 Définitions & propriétés élémentaires . . . . .	64
3.1.1 Modules et bimodules hilbertiens sur $C(T^2)$ . . . . .	64
3.1.2 Variétés de Heisenberg quantiques . . . . .	66
3.1.3 Action du groupe de Heisenberg . . . . .	70
3.1.4 Cas $c = 0$ . . . . .	73
3.2 $K$ -théorie et cohomologie cyclique sur $\mathcal{D}$ . . . . .	74
3.2.1 Sous-algèbre lisse et dérivations . . . . .	74
3.2.2 $K$ -théorie et représentants . . . . .	75
3.2.3 Cocycles cycliques . . . . .	77
3.3 Accouplements pairs . . . . .	79
3.3.1 Définition et résultats . . . . .	79
3.3.2 Module $N$ sur $D$ pour $\mu \neq 0$ et $\nu \neq 0$ . . . . .	80
3.3.3 Connexions et appariements pour $\mathcal{N}$ . . . . .	81
3.3.4 Connexions et appariements pour $\mathcal{N}^\dagger$ . . . . .	82
3.3.5 Extension aux cas $\mu = 0$ ou $\nu = 0$ . . . . .	86
3.4 Appariements impairs . . . . .	88
3.4.1 Définitions, résultats et premiers calculs . . . . .	88
3.4.2 Translation des dérivations et appariements de $HC^1(\mathcal{D})$ . . . . .	89
3.4.3 Appariement de degré 3 . . . . .	91
3.5 Indice et formule de transfert . . . . .	97
3.5.1 Indice des unitaires . . . . .	97
3.5.2 Application de la théorie générale : QHM . . . . .	100
3.5.3 Dimensions et bases de $HP^*(\mathcal{D})$ . . . . .	101
<b>A Compléments divers</b>	<b>105</b>
A.1 Partitions de l'unité . . . . .	105
A.2 Forme volume sur $D$ . . . . .	106
A.2.1 Condition de cocycle . . . . .	106
A.2.2 Appariement avec $\varphi_{1,2,3}$ . . . . .	107
A.3 Des algèbres de Pimsner aux algèbres de Toeplitz . . . . .	108
A.4 Bimodule hilbertien lisse : contre-exemple . . . . .	110
<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>
<b>Index des définitions</b>	<b>115</b>

# Introduction

L'objectif de la présente thèse est double : il s'agit d'une part d'établir pour les « produits croisés généralisés lisses » un hexagone de cohomologie cyclique périodique analogue à la suite de Pimsner-Voiculescu et d'autre part d'utiliser cet hexagone, conjointement avec des calculs d'appariements de Chern-Connes, dans le cas particulier des variétés de Heisenberg quantiques (QHM) pour obtenir une *base explicite* de la cohomologie cyclique périodique des QHM.

## Contexte et résultats antérieurs

Cette thèse s'appuie essentiellement sur deux notions : celle de *produit croisé généralisé* et celle d'*appariements de Chern-Connes*. Notre travail général sur ces deux notions est ensuite illustré par une application aux *variétés de Heisenberg quantiques*.

Les *produits croisés généralisés* sont des algèbres que ABADIE, EILERS et EXEL ont définies en 1998 dans l'article [6]. Les produits croisés par  $\mathbb{Z}$  sont en particulier des produits croisés généralisés, ce qui explique cette dénomination. Présentons succinctement la construction des produits croisés généralisés.

Nous partons d'une  $C^*$ -algèbre  $A$  – que nous appellerons *algèbre de base* – et d'un bimodule hilbertien  $E$  sur  $A$ . Nous pouvons noter  $E^{\otimes n} = E \otimes_A E \otimes \cdots \otimes_A E$  le produit tensoriel intérieur itéré. Comme  $E$  est un bimodule hilbertien, son *opposé* est également un  $A$ - $A$ -bimodule hilbertien, que nous appelons  $E^{\otimes -1}$ . La notation  $E^{\otimes p}$  prend alors un sens pour  $p \in \mathbb{Z}$ . Les produits tensoriels et les produits scalaires permettent de définir des « concaténations »  $E^{\otimes p} \times E^{\otimes q} \rightarrow E^{\otimes (p+q)}$ , qui prolongent la multiplication sur  $A$  et induisent un produit sur la somme directe

$$\cdots \oplus E^{\otimes -2} \oplus E^{\otimes -1} \oplus A \oplus E \oplus E^{\otimes 2} \oplus \cdots.$$

Le produit croisé généralisé  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  de  $A$  par  $E$  est alors une  $C^*$ -complétion de cette somme directe.

Tout comme les produits croisés généralisés, les *algèbres de Pimsner* sont des  $C^*$ -algèbres construites à partir d'un bimodule hilbertien  $E$  et de son algèbre de base  $A$ . Ces algèbres ont été introduites par PIMSNER en 1997 dans l'article [41]. Les deux notions sont très proches : dans beaucoup de cas, les algèbres de Pimsner sont également des produits croisés généralisés et vice versa. Les variétés de Heisenberg quantiques appartiennent

ainsi aux deux classes à la fois. Cependant, ABADIE et ACHIGAR ont prouvé que les deux notions sont distinctes dans l'article [5]. La définition de PIMSNER étant la plus étudiée des deux, nous décrirons donc les résultats qui la concernent. Notons que dans ses articles [32, 33], KATSURA a énoncé une définition qui unifie produits croisés généralisés et algèbres de Pimsner.

Dans son article original [41], PIMSNER étudiait ses algèbres sous l'angle de leurs  $KK$ - et  $K$ -théories. D'autres articles ont été consacrés à la détermination de leurs idéaux, à la recherche de critères de simplicité et à l'étude de leurs représentations – voir par exemple [29, 34, 42, 28]. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de bonne notion de « sous-algèbres lisses » pour les produits croisés généralisés.

Une des originalités de notre travail est donc de proposer une définition pour ces sous-algèbres lisses. La cohomologie cyclique (périodique) de ces « versions lisses » est alors non triviale, ce qui autorise des calculs d'appariements de Chern-Connes significatifs.

Les *appariements de Chern-Connes* ont été définis par CONNES en 1985 dans son article [13]. Il s'agit d'applications bilinéaires de la  $K$ -théorie et de la cohomologie cyclique (périodique) vers les nombres complexes. Ces appariements ont une parité : l'appariement pair associe un élément de  $K$ -théorie paire et un élément de cohomologie cyclique périodique paire pour construire un nombre complexe, alors que l'appariement impair prend des éléments impairs. Ces appariements forment une sorte de « version duale » du caractère de Chern.

On pourrait considérer notre travail comme le premier pas d'une extension de l'article [38] de NEST. Dans ce papier, il prouve que sous certaines hypothèses, si on dispose d'une version lisse d'une  $C^*$ -algèbre  $A$  et d'un automorphisme  $\alpha$  de  $A$ , on peut définir une version lisse du produit croisé  $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ . Il établit ensuite une suite exacte à 6 termes pour la cohomologie cyclique périodique et prouve qu'une « formule de transfert » relie les appariements sur le produit croisé et sur l'algèbre de base. Notre thèse décrit l'analogie des deux premières étapes dans le cadre plus général des produits croisés généralisés.

Pour illustrer les propriétés ainsi établies pour les produits croisés généralisés, nous les appliquerons aux *variétés de Heisenberg quantiques* (QHM). Il s'agit en fait d'une famille de  $C^*$ -algèbres qui a été introduite par RIEFFEL en 1989 dans l'article [45]. Les algèbres  $D_{\mu,\nu}^c$  de cette famille sont indexées par  $c \in \mathbb{Z}$  et  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Par souci de concision, nous les noterons simplement  $D$  quand le contexte le permettra. Les QHM sont toutes dotées d'une action du *groupe de Heisenberg*  $H_3$ , qui est un groupe de Lie de dimension 3. Elles sont des exemples de produits croisés généralisés avec pour algèbre de base  $A = C(T^2)$ . Enfin, elles ont été largement étudiées dans des séries d'articles d'ABADIE ([1, 2, 7, 3, 4]) et de CHAKRABORTY ([11] et [10]).

Les travaux d'ABADIE étudient essentiellement les modules projectifs de type fini sur  $D$ , la  $K$ -théorie de l'algèbre et les équivalences de Morita entre QHM. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante d'équivalence de Morita a été obtenue dans [4] et des conditions nécessaires d'isomorphisme sont énoncées dans [3].

Les articles de CHAKRABORTY s'appuient sur les notions de *triplet spectral* et de *géométrie non-commutative* définies par Connes dans [16] et [17]. Ils décrivent les QHM sous l'angle de la *métrique de Connes* et des « opérateurs de Dirac » disponibles sur cette algèbre.

Dans leur article [19] de 2008, CONNES et DUBOIS-VIOLETTE ont indiqué comment utiliser les QHM pour étudier les sphères non-commutatives de dimension 3 – qu'ils ont définies dans [18]. Plus récemment, KANG a étudié les QHM du point de vue de leurs fonctionnelles de Yang-Mills ([30]) et KUMJIAN a entamé une interprétation de ces objets comme algèbres de groupoïdes [35].

En tant qu'étude des variétés de Heisenberg quantiques, cette thèse se situe dans le prolongement des articles évoqués ci-dessus – et tout particulièrement de [3] qui calculait les images des états traciaux évalués sur  $K_0(D)$ . Toutefois, notre approche des QHM à travers leurs *appariements de Chern-Connes* est totalement neuve.

## Résultats de cette thèse

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier rassemble des résultats déjà connus pour poser les bases nécessaires à la suite, le deuxième expose nos résultats généraux relatifs aux foncteurs  $\mathcal{K}$ -stables, invariants sous difféotopie et semi-exacts sur les produits croisés généralisés lisses. Nous prouvons en particulier que certains produits croisés généralisés lisses, que nous appelons « à croissance modérée », entrent dans un hexagone exact en cohomologie cyclique périodique. Enfin, le troisième étudie les variétés de Heisenberg quantiques sous l'angle des appariements de Chern-Connes. En combinant les résultats des deuxième et troisième chapitres, nous pouvons exhiber une *base explicite* de la cohomologie cyclique périodique des QHM.

Dans le chapitre 1, nous rappelons un certain nombre de définitions et de propriétés, en commençant par celles relatives aux espaces localement convexes. La section suivante sera consacrée aux modules et bimodules hilbertiens, ainsi qu'aux  $C^*$ -correspondances. Les *produits croisés généralisés* apparaîtront alors comme les  $C^*$ -algèbres universelles associées aux bimodules hilbertiens. La troisième section se place dans le cas d'une  $C^*$ -algèbre munie d'une action de groupe de Lie. Nous y rassemblons les résultats de cohomologie cyclique pertinents. Nous montrerons en particulier qu'une action de bimodule hilbertien permet de définir un *produit croisé généralisé lisse* canonique – il ne nous restera plus qu'à prouver la *croissance modérée* pour appliquer la théorie du chapitre suivant.

Le chapitre 2 présente nos résultats généraux concernant la cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés. Dans une première section, nous présentons les notions générales que nous utiliserons dans la seconde section. Nous introduisons en particulier les notions de *quasi-homomorphisme*, de *contexte de Morita* et d'*algèbre de Toeplitz lisse*. En s'appuyant sur ce dernier objet, nous commençons la seconde section par la construction d'une suite exacte courte liant les produits croisés généralisés lisses et

les algèbres de Toeplitz associées. À partir de cette suite exacte, nous pouvons construire un hexagone exact. La fin de ce chapitre vise à identifier les éléments de cet hexagone avec ceux de l'algèbre de base. Nous ne pouvons atteindre cet objectif qu'en introduisant des conditions supplémentaires sur l'algèbre, ce qui nous amène à introduire la classe des *produits croisés généralisés modérés*.

Nous prouvons alors que la cohomologie cyclique périodique de ces algèbres *lisses* satisfait une « suite de Pimsner-Voiculescu » tout-à-fait analogue à celle qui existe pour la  $K$ -théorie des produits croisés généralisés, dans leurs versions  $C^*$ -algèbres. Il est d'ailleurs possible de définir une «  $k$ -théorie lisse », qui entre dans un hexagone exact puis de prouver que les flèches de bords des deux diagrammes sont « compatibles » au sens où elles satisfont une *formule de transfert*, dont nous donnerons un exemple explicite au chapitre suivant.

Le chapitre 3 est construit autour de l'exemple des variétés de Heisenberg quantiques. Notre objectif sera de montrer comment les appariements de Chern-Connes se combinent avec l'hexagone du chapitre 2 et l'action du groupe de Heisenberg pour donner une base explicite de la cohomologie cyclique périodique des QHM. Le principe de la preuve est très simple :

- l'action du groupe de Heisenberg nous donne une version lisse canonique  $\mathcal{D}$  des QHM, ainsi que des cocycles cycliques explicites sur cette algèbre ;
- le calcul des appariements de Chern-Connes nous permet d'extraire une famille libre de ces cocycles cycliques ;
- l'hexagone obtenu au chapitre 2 nous permet d'évaluer la dimension de la cohomologie cyclique périodique, et donc d'en déduire que la famille libre est une base.

La progression du chapitre sera la suivante : nous commencerons par définir ces algèbres, puis nous prouverons qu'elles possèdent une action du groupe de Heisenberg  $H_3$ . Nous venons de voir l'importance cruciale que cette action aura pour notre étude.

En nous appuyant sur les travaux antérieurs de ABADIE, nous calculons la  $K$ -théorie puis obtenons des formes explicites pour les modules projectifs de type fini sur les QHM. CONNES a montré ([13, 15]) comment calculer les appariements de Chern-Connes en utilisant la courbure d'un module projectif. En utilisant cette méthode, nous donnons les valeurs explicites des appariements dans le cas pair. Pour le cas impair, nous commençons par construire des représentants explicites de la  $K$ -théorie. Des calculs principalement algébriques permettent alors de se ramener à un appariement (pair) sur l'algèbre de base.

Il suffit alors de prouver que les QHM sont des produits croisés généralisés lisses à *croissance modérée* pour appliquer les résultats généraux du chapitre 2 aux QHM lisses. Ceci nous fournit un hexagone exacte au niveau de la cohomologie cyclique périodique. Grâce à cet hexagone et à quelques calculs d'appariements supplémentaires, nous pouvons déterminer les dimensions des cohomologies cycliques périodiques des variétés de Heisenberg quantiques. Ce calcul de dimension prouve que les cocycles cycliques construits plus haut forment une base de  $HP^*(\mathcal{D})$ .

Par ailleurs, la  $K$ -théorie de  $D$  entre dans un hexagone exact qui généralise la suite de Pimsner-Voiculescu. Nous pouvons ainsi calculer l'image des éléments de  $K_1(D)$

par « l'application de l'indice »  $\partial: K_1(D) \rightarrow K_0(A)$ . Ces calculs combinés avec notre base de la cohomologie cyclique périodique nous permettent d'obtenir une application  $\#: HP^0(\mathcal{A}) \rightarrow HP^1(\mathcal{D})$  qui satisfait la *formule de transfert*

$$\langle [U], \# \varphi \rangle = i2\pi \langle \partial[U], \varphi \rangle,$$

où  $\mathcal{A} = C^\infty(T^2)$  est « l'algèbre de base lisse »,  $\varphi$  est un cocycle cyclique pair de  $\mathcal{A}$  et  $[U] \in K_1(\mathcal{D})$ . Cette formule est parfaitement analogue à celle donnée par NEST dans son article [38] sur les produits croisés par  $\mathbb{Z}$ .

En conclusion, cette thèse allie un résultat général sur la cohomologie cyclique périodique des produits croisés généralisés lisses avec un résultat spécifique aux variétés de Heisenberg quantiques. Elle ouvre également des perspectives, dans le sens où des constructions (algébriques) similaires sont possibles pour certaines algèbres graduées par des groupes discrets plus généraux que  $\mathbb{Z}$ .



# Hypothèses permanentes et notations

Tous les espaces vectoriels et les algèbres considérés dans la suite seront des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels et des  $\mathbb{C}$ -algèbres. Nous suivrons globalement les notations de [9]. Dans la suite, un « homomorphisme » entre  $C^*$ -algèbres sera en fait un «  $*$ -homomorphisme » de  $*$ -algèbres, sauf mention expresse du contraire.

Nous ne considérerons que des modules *projectifs de type fini*. En particulier, les modules et bimodules hilbertiens seront projectifs de type fini. Toutes les algèbres considérées ici sont unifères.

Nous utiliserons indifféremment les termes « accouplements » et « appariements » pour parler des *pairings* de Chern-Connes (définitions 3.42 et 3.64).

## Notations

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  : produit scalaire d'un module hilbertien à droite.
- ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle$  : produit scalaire d'un module hilbertien à gauche.
- $A, B, C, \dots$  : notation typique pour une  $C^*$ -algèbre.
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$  : notation typique pour une algèbre localement convexe.
- $A^{(n)}$  : ensemble des éléments de l'algèbre  $A$  homogènes de degré  $n$  pour son action de jauge (notation 1.18).
- $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  : produit croisé généralisé (définition 1.50).
- $C^*(\pi, \mathcal{T})$  :  $C^*$ -algèbre associée à la représentation de  $C^*$ -correspondance  $(\pi, \mathcal{T})$  (notation 1.33).
- $\delta_{k,l}$  : symbole de Kronecker, vaut 1 si  $k = l$  et 0 sinon.
- $D_{\mu,\nu}^c$  ou  $D$  : variété de Heisenberg quantique (définition 3.8).
- $\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c$  ou  $\mathcal{D}$  : version lisse du précédent (définition 3.26).
- $E_A$  :  $E$  considéré comme module à droite sur  $A$ .
- ${}_A E$  :  $E$  considéré comme module à gauche sur  $A$ .
- $\mathbb{E}_0$  : espérance conditionnelle associée à une action de jauge (lemme 1.20).
- $E \otimes_A F$  : le produit tensoriel intérieur  $E_A$  et  ${}_A F$ . Abrégé en  $E \otimes F$ .
- $E^{\otimes_{A^n}}$  : forme condensée de  $E \otimes_A E \otimes_A \dots \otimes_A E$ .
- $E_+$  : somme de modules hilbertiens  $E_+ = \bigoplus E^{\otimes_{A^n}}$  – objet noté  $\mathcal{E}_+$  dans [41].
- $\bar{\gamma}$  : action de jauge sur une algèbre de Toeplitz (voir la définition 1.38).



- $\gamma$  : notation typique pour une action de jauge (voir la page 21).
- $H_3$  : groupe de Heisenberg (voir la définition 3.16)
- $J_E$  : dans une algèbre de Pimsner, un idéal (voir la définition A.2).
- $\mathcal{K}(E, F)$  : opérateurs compacts sur des modules hilbertiens ([9] II.7.2.4).
- $\mathcal{K}$  : algèbre localement convexe des compacts lisses (définition 2.4).
- $\mathcal{L}(E, F)$  : opérateurs à adjoint sur des modules hilbertiens ([9] II.7.2.1).
- $M_{\mu, \nu}^c$  ou  $M$  : bimodule hilbertien générateur de  $D$  (définition 3.13).
- $\mathcal{M}_{\mu, \nu}^c$  ou  $\mathcal{M}$  : version lisse du précédent (notation 3.29).
- $N_{\mu, \nu}^c$  ou  $N$  : module sur  $D$  (théorème 3.45).
- $\mathcal{N}_{\mu, \nu}^c$  ou  $\mathcal{N}$  : version lisse du précédent (définition 3.49).
- $N_{\mu, \nu}^{\dagger c}$  ou  $N^\dagger$  : module sur  $D$  (définition 3.53).
- $\mathcal{N}_{\mu, \nu}^{\dagger c}$  ou  $\mathcal{N}^\dagger$  : version lisse du précédent (définition 3.56).
- $\hat{S}$  et  $\check{S}$  :  $\hat{S} = S \otimes 1$  et  $\check{S} = e \otimes S$  (voir la page 48)
- $\mathcal{T}$  :  $C^*$ -algèbre de Toeplitz « standard », générée par une isométrie.
- $\mathcal{T}$  : algèbre de Toeplitz *lisse* « standard » (définition 2.17).
- $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  : algèbre de Toeplitz lisse généralisée (définition 2.28).
- $\Theta_{x, y}$  : opérateur « de rang 1 » sur des modules hilbertiens ([9], II.7.2.4).
- $V \odot W$  : produit tensoriel algébrique de  $V$  et  $W$ .
- $V \hat{\otimes} W$  : produit tensoriel projectif de  $V$  et  $W$  (définition 1.11).
- $\hat{x}$  et  $\check{x}$  :  $\hat{x} = x \otimes 1$  et  $\check{x} = e \otimes x$  (voir la page 48).

# Chapitre 1

## Contexte : définitions et résultats connus

Dans ce chapitre, nous rassemblons les définitions et les propriétés dont nous aurons besoin, afin de faciliter la tâche du lecteur d'une part, et de fixer les notations d'autre part.

Nous commencerons par des rappels concernant les espaces localement convexes. Après avoir donné les définitions de base et procédé à quelques rappels concernant les produits tensoriels projectifs, nous pourrons considérer les algèbres localement convexes et les actions de jauge sur celles-ci. Notre référence pour cette section sera [46], avec des emprunts à [8] et [48].

La section suivante introduira les définitions des modules hilbertiens, des  $C^*$ -correspondances et des bimodules hilbertiens. Nous verrons rapidement comment nous pouvons associer des  $C^*$ -algèbres universelles à ces objets. Nos références principales seront [36, 9, 33] et [41].

Enfin, la troisième section sera consacrée aux constructions cohomologiques possibles sur une  $C^*$ -algèbre munie d'une action de groupe de Lie. Nous verrons que dans ce cas, nous pouvons construire une « sous-algèbre lisse » canonique ainsi que des cocycles cycliques sur cette sous-algèbre. Si nous disposons d'une action d'un groupe de Lie  $G$  sur un module  $E$ , nous pouvons définir une connexion sur  $E$ . Si  $E$  est un bimodule hilbertien équipé d'une action de bimodule hilbertien, l'action peut s'étendre au produit croisé généralisé associé. Cette section 3 rassemble des résultats mentionnés dans [47, 15] et [41].

### 1.1 Espaces localement convexes

#### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.1** (espace topologique séparé). Nous appellerons *espace séparé* un espace topologique  $X$  tel que deux points distincts  $x, y \in X$  étant donnés, on peut trouver des voisinages  $U$  et  $V$  de  $x$  et  $y$  respectivement tels que  $U \cap V = \emptyset$ .

Ces espaces sont appelés *Hausdorff* dans [46] (voir le chapitre 4).

**Définition 1.2** (semi-norme). Un espace vectoriel  $V$  étant donné, une *semi-norme*  $p$  sur  $V$  est une application  $p: V \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

- (i)  $p(v) \geq 0$ , quel que soit  $v \in V$  ;
- (ii)  $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$  pour tous vecteurs  $v_1, v_2$  ;
- (iii)  $p(\lambda v) = |\lambda|p(v)$ , quels que soient  $v \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Définition 1.3** (espace localement convexe). Un *espace vectoriel localement convexe* ou *espace localement convexe* est un espace vectoriel  $V$  muni d'une famille de semi-normes  $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Ces dernières confèrent une topologie naturelle à  $V$ .

Dans cette topologie, une suite  $v_n \in V$  tend vers  $v_\infty$  si et seulement si quelle que soit la semi-norme  $p_\alpha$ ,  $p_\alpha(v_n - v_\infty) \rightarrow 0$ .

**Définition 1.4** (base de semi-normes continues). Une famille  $(p_\beta)_{\beta \in B}$  de semi-normes sur un espace localement convexe  $V$  est appelée une *base de semi-normes continues* sur  $V$  si pour toute semi-norme continue  $q$  sur  $V$ , il existe  $p_\beta$  et  $C > 0$  telles que :

$$q(v) \leq Cp_\beta(v)$$

Si  $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$  est une famille de semi-normes qui définissent une topologie sur  $V$ , on peut construire une base de semi-normes continues en considérant tous les

$$p_B(v) = \sup_{\alpha \in B} p_\alpha(v),$$

où  $B$  est un sous-ensemble fini de  $A$ .

Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que la famille  $(p_\alpha)$  de semi-normes qui définit la topologie de  $V$  est une base de semi-normes continues.

Énonçons la proposition 7.7 de [46] sous sa forme modifiée :

**Proposition 1.5.** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces localement convexes munis respectivement des bases de semi-normes continues  $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$  et  $(q_\beta)_{\beta \in B}$ . Une application  $f: V \rightarrow W$  est continue si et seulement si pour tout  $\beta \in B$ , il existe  $\alpha \in A$  et une constante  $C$  tels que

$$q_\beta(f(v)) \leq Cp_\alpha(v).$$

### 1.1.2 Produits tensoriels

Dans la suite,  $V$  et  $W$  sont des espaces localement convexes. Nous utiliserons la notation  $V \odot W$  pour représenter le produit tensoriel algébrique de  $V$  et  $W$ .

Nous suivons la définition du produit tensoriel projectif donnée dans [46], chapitre 43.

**Définition 1.6** (topologie projective). La *topologie projective* sur  $V \odot W$  est la topologie la plus forte pour laquelle l'application bilinéaire canonique  $(x, y) \mapsto x \otimes y$  de  $V \times W$  vers  $V \odot W$  est continue. On note  $V \odot_\pi W$  l'espace vectoriel  $V \odot W$  muni de la topologie projective.

Pour simplifier l'exposition, nous utilisons la proposition 43.1 comme définition :

**Définition 1.7** (produit tensoriel de semi-normes). Si  $p$  (resp.  $q$ ) est une semi-norme sur  $V$  (resp.  $W$ ), le *produit tensoriel  $p \otimes q$  des semi-normes* de  $p$  et  $q$  est la semi-norme définie sur  $V \odot W$  par :

$$p \otimes q(x) = \inf \left\{ \sum_j p(v_j)q(w_j) \mid x = \sum_{j=1}^n v_j \otimes w_j \right\},$$

où la décomposition  $x = \sum_{j=1}^n v_j \otimes w_j$  ne doit comporter qu'un nombre fini de termes.

Reproduisons la proposition 43.3 :

**Proposition 1.8.** *Le produit tensoriel  $V \odot_\pi W$  est séparé si et seulement si  $V$  et  $W$  sont séparés.*

**Remarque 1.9.** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces localement convexes munis respectivement des bases de semi-normes continues  $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$  et  $(q_\beta)_{\beta \in B}$ . La famille  $(p_\alpha \otimes q_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$  est une base de semi-normes continues de  $V \odot W$ .

La proposition 43.6 de [46] nous permet de définir des applications sur le produit tensoriel :

**Proposition 1.10.** *Soient  $V_1, V_2, W_1$  et  $W_2$  quatre espaces localement convexes et séparés et*

$$f: V_1 \rightarrow V_2 \qquad g: W_1 \rightarrow W_2$$

*des applications linéaires continues. Le produit tensoriel  $f \odot g$  est une application linéaire continue  $f \odot g: V_1 \odot W_1 \rightarrow V_2 \odot W_2$ .*

Nous pouvons maintenant donner une définition de  $V \hat{\odot} W$  (définition 43.5 de [46]) :

**Définition 1.11** (produits tensoriels projectifs). Si  $V$  et  $W$  sont des espaces localement convexes, le *produit tensoriel projectif*  $V \hat{\odot} W$  de  $V$  et  $W$  est la complétion de  $V \odot W$  pour la topologie projective.

**Définition 1.12** (produit tensoriel d'applications). Soient  $V_1, V_2, W_1$  et  $W_2$  quatre espaces localement convexes et séparés et

$$f: V_1 \rightarrow V_2 \qquad g: W_1 \rightarrow W_2$$

*des applications linéaires continues.  $f \otimes g$  est l'extension de  $f \odot g$  en une fonction continue  $f \otimes g: V_1 \hat{\odot} W_1 \rightarrow V_2 \hat{\odot} W_2$ .*

### 1.1.3 Algèbres localement convexes

Nous reprenons la définition de [24] :

**Définition 1.13** (algèbre localement convexe). Une *algèbre localement convexe* est un espace localement convexe complet  $A$  muni d'une multiplication bilinéaire  $A \times A \rightarrow A$  qui est continue.

Nous demandons la continuité sur  $A \times A$ , c'est-à-dire comme fonction de *deux* variables. Concrètement, si  $p_\alpha$  est une semi-norme continue sur  $A$ , il doit exister une semi-norme continue  $p_{\alpha'}$  telle que

$$p_\alpha(xy) \leq p_{\alpha'}(x)p_{\alpha'}(y),$$

pour tous  $x, y \in A$ .

**Remarque 1.14.** Le produit tensoriel projectif de deux algèbres localement convexes est une algèbre localement convexe (voir [24]). En effet, considérons le produit  $XY$  où  $X, Y \in A \otimes B$  peuvent s'écrire comme sommes finies :

$$X = \sum_p a_p \otimes b_p \qquad Y = \sum_{p'} a'_{p'} \otimes b'_{p'}$$

alors

$$(p_\alpha \otimes p_\beta)(XY) \leq \sum_{p,p'} p_\alpha(a_p a'_{p'}) p_\beta(b_p b'_{p'}) \leq \left( \sum_p p_\alpha(a_p) p_\beta(b_p) \right) \left( \sum_{p'} p_\alpha(a'_{p'}) p_\beta(b'_{p'}) \right)$$

En prenant ensuite la borne inférieure sur les décompositions possibles, il apparaît que

$$(p_\alpha \otimes p_\beta)(XY) \leq (p_\alpha \otimes p_\beta)(X)(p_\alpha \otimes p_\beta)(Y).$$

De même, la définition d'une  $m$ -algèbre est donnée dans [24], p.5 :

**Définition 1.15** ( $m$ -algèbre). Une  $m$ -algèbre est une algèbre localement convexe pour laquelle il existe une base de semi-normes *sous-multiplicatives*, c'est-à-dire des semi-normes  $p$  telles que

$$p(xy) \leq p(x)p(y).$$

En suivant [24] p.5, nous faisons la remarque suivante :

**Remarque 1.16** (produit tensoriel projectif de deux  $m$ -algèbres). Le produit tensoriel projectif de deux  $m$ -algèbres est une  $m$ -algèbre.

Un cas particulier de  $m$ -algèbre est celui des *algèbres de Fréchet* :

**Définition 1.17** (algèbre de Fréchet). Une *algèbre de Fréchet* est une algèbre localement convexe séparée dont la topologie est induite par une famille *dénombrable* de semi-normes sous-multiplicatives, c'est-à-dire :

$$p_\alpha(xy) \leq p_\alpha(x)p_\alpha(y).$$

### 1.1.4 Action de jauge et coefficients de Fourier

Cette section est une légère généralisation des résultats obtenus dans l'appendice de [8] et dans la section 2 de [48]. Nous faisons figurer ces résultats pour référence future.

**Hypothèses :** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre localement convexe munie d'une *action de jauge*, c'est-à-dire d'une action de  $S^1$ . On note cette action  $\gamma_t$ ,  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$  et on suppose que

- l'action de jauge est *isométrique* : pour toute semi-norme  $p$  sur  $\mathcal{A}$ ,

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad p(\gamma_t(a)) = p(a);$$

- l'action de jauge est *continue point par point* : pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $t \mapsto \gamma_t(a)$  est continue.

**Notation 1.18.** Si  $\gamma$  est une action de jauge sur une algèbre  $\mathcal{A}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$  nous notons  $\mathcal{A}^{(n)}$  l'ensemble des éléments homogènes de degré  $n$  de  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}^{(n)} = \{a \in \mathcal{A} : \forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \gamma_t(a) = e^{i2\pi nt} a\}.$$

Notons que si  $\mathcal{A}$  est munie d'une involution anti-linéaire, celle-ci envoie  $\mathcal{A}^{(n)}$  sur  $\mathcal{A}^{(-n)}$ .

**Remarque 1.19.** Il est clair que pour toute combinaison linéaire (finie)  $a_0$  d'éléments homogènes,  $t \mapsto \gamma_t(a_0)$  est continue. Si l'action est isométrique,

$$\begin{aligned} p(\gamma_t(a) - a) &\leq p(\gamma_t(a) - \gamma_t(a_0)) + p(\gamma_t(a_0) - a_0) + p(a_0 - a) \\ &\leq 2p(a - a_0) + p(\gamma_t(a_0) - a_0). \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'espace vectoriel (algébrique) engendré par les éléments homogènes est dense, il est facile de voir que l'action de jauge est continue point par point. Réciproquement, la proposition 1.21 montre que si l'action de jauge est continue point par point, alors les sommes finies d'éléments homogènes sont denses.

À partir de l'action de jauge, nous pouvons construire des « coefficients de Fourier », dont un cas particulier est une espérance conditionnelle  $\mathbb{E}_0$  (voir [9] II.6.10.4.(v)) :

**Lemme 1.20** (coefficients de Fourier et espérance conditionnelle). *Si  $\gamma$  est une action de jauge continue point par point et isométrique,  $\mathcal{A}$  admet des coefficients de Fourier généralisés, définis par les applications contractantes  $\mathbb{E}_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{(n)}$  où pour  $n \in \mathbb{Z}$  :*

$$\mathbb{E}_n(a) = \int_{S^1} e^{-i2\pi nt} \gamma_t(a) dt.$$

Ces applications sont  $\mathcal{A}^{(0)}$ -linéaires.

Dans le cas particulier de  $n = 0$ , nous obtenons une espérance conditionnelle  $\mathbb{E}_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{(0)}$ , donnée par

$$\mathbb{E}_0(a) = \int_{S^1} \gamma_t(a) dt.$$

*Démonstration.* L'action de jauge  $\gamma$  étant continue point par point, les intégrandes des  $\mathbb{E}_n(a)$  sont des fonctions continues et l'intégrale est bien définie.

Pour montrer que les applications  $\mathbb{E}_n$  sont contractantes, fixons une semi-norme  $p$  sur  $\mathcal{A}$ . Les hypothèses sur  $\gamma_t$  imposent :

$$p\left(\int_{S^1} e^{-i2\pi nt} \gamma_t(a) dt\right) \leq \int_{S^1} p(e^{-i2\pi nt} \gamma_t(a)) dt = \int_{S^1} p(a) dt = p(a).$$

Si  $a, c \in \mathcal{A}^{(0)}$  et  $b \in \mathcal{A}$ , alors pour tout  $t \in S^1$ ,  $\gamma_t(abc) = a\gamma_t(b)c$ . Il est alors facile de prouver que les  $\mathbb{E}_n$  sont  $\mathcal{A}^{(0)}$ -linéaires.

Pour vérifier maintenant que les  $\mathbb{E}_n(a)$  sont dans  $\mathcal{A}^{(n)}$ , notons que pour tout  $u \in S^1$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_u(\mathbb{E}_n(a)) &= \gamma_u\left(\int_{S^1} e^{-i2\pi nt} \gamma_t(a) dt\right) = \int_{S^1} e^{-i2\pi nt} \gamma_{u+t}(a) dt = \\ &= e^{i2\pi nu} \int_{S^1} e^{-i2\pi nt'} \gamma_{t'}(a) dt' = e^{i2\pi nu} \mathbb{E}_n(a), \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable  $t' = t + u$ .  $\square$

La proposition qui suit est une adaptation du lemme 16 de la section 8.2 de [8]. Pour lui donner un sens, nous notons  $F_N(t)$  les *noyaux de Fejér* et pour  $a \in \mathcal{A}$  :

$$S_N(a) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) \gamma_t(a) \frac{dt}{2\pi}.$$

Par ailleurs, pour  $a \in \mathcal{A}$  fixé, si la fonction  $t \mapsto \gamma_t(a)$  est dérivable en  $t$ , nous notons  $\partial a$  sa dérivée au point  $t = 0$ . Nous dirons alors que  $a$  est *jauge-dérivable*.

**Proposition 1.21** ([8], lemme 16). *Si  $\gamma$  est continue point par point et isométrique, alors l'espace vectoriel (algébrique) engendré par les éléments homogènes de  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathcal{A}$ .*

*En outre, si  $a$  est jauge dérivable, pour toute semi-norme  $p$  sur  $\mathcal{A}$ ,*

$$p(S_N(a) - a) \leq \frac{\pi}{\sqrt{N}} p(\partial a) + \frac{2}{\sqrt{N}} p(a). \quad (1.1)$$

*Démonstration.* Voir le lemme 16 de [8]. Notons que dans [8], les auteurs considèrent uniquement des  $C^*$ -algèbres et des  $C^*$ -normes, cependant l'examen des preuves montre que sous nos hypothèses, les résultats s'appliquent pour toute semi-norme  $p$  sur  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## 1.2 Algèbres de Toeplitz et produits croisés généralisés

### 1.2.1 Modules hilbertiens

Dans cette sous-section, nous supposons que  $A$  est une  $C^*$ -algèbre. Les modules hilbertiens ont été introduits par Kaplansky [31] dans le cas commutatif et par Paschke [40] et Rieffel [43] dans le cas général. Rappelons la définition :

**Définition 1.22** (module hilbertien). Un  $C^*$ -module à droite ou module hilbertien à droite sur  $A$  est un  $A$ -module à droite  $E$ , ainsi qu'une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow A$ , qui est linéaire en la seconde variable et vérifie les conditions :

- (i)  $0 \leq \langle \xi, \xi \rangle$ , au sens de la positivité dans  $A$ ,
- (ii)  $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \iff \xi = 0$ ,
- (iii)  $\langle \xi, \zeta a \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle a$ ,
- (iv)  $\langle \xi, \zeta \rangle^* = \langle \zeta, \xi \rangle$ ,
- (v)  $E$  est complet pour la norme  $\|\xi\| = \|\langle \xi, \xi \rangle\|^{\frac{1}{2}}$ ,

quels que soient les  $\xi, \zeta \in E, a \in A$ . Nous dirons que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le *produit scalaire sur  $E$  à valeurs dans  $A$* .

Si l'image du produit scalaire  $\langle E, E \rangle$  est dense dans  $A$ , nous dirons que  $E$  est un *module hilbertien plein*.

Les *modules hilbertiens à gauche* sont définis de façon analogue. Cependant, nous demandons alors que le produit scalaire à valeurs dans  $A$  soit linéaire en la *première* variable.

Dans la suite, s'il y a lieu de préciser la structure du module, nous noterons  $E_A$  pour un  $A$ -module à droite et  ${}_A E$  pour un module à gauche. De même, nous distinguerons les produits scalaires à gauche et à droite en les notant respectivement  ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .

Le cas échéant, nous noterons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  les produits scalaires sur différents modules hilbertiens  $E$  et  $F$ .

**Définition 1.23** (opérateurs à adjoints). Soient  $E_A$  et  $F_A$  deux modules hilbertiens. Une application  $T : E \rightarrow F$  est un *opérateur à adjoint* s'il existe une application  $T^* : F \rightarrow E$  telle que

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, T^*y \rangle_E,$$

pour tous  $x \in E, y \in F$ .

L'ensemble des opérateurs à adjoints de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}_A(E, F)$ ,  $\mathcal{L}(E_A, F_A)$  ou simplement  $\mathcal{L}(E, F)$ . Nous abrègerons  $\mathcal{L}_A(E, E)$  en  $\mathcal{L}_A(E)$  ou encore  $\mathcal{L}(E)$ .

On peut munir  $\mathcal{L}(E)$  de la norme d'opérateur naturelle associée au Banach  $E$ . Il est bien connu (voir [9], II.7.2) que  $\mathcal{L}(E)$  est alors une  $C^*$ -algèbre. Nous pouvons également définir l'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  vers  $F$  (voir [9], II.7.2.4) :

**Définition 1.24** (opérateurs compacts). Soient  $E$  et  $F$  deux modules hilbertiens à droite sur une même  $C^*$ -algèbre  $A$ . Pour  $\eta \in E$  et  $\xi \in F$ , on définit un opérateur  $\Theta_{\xi, \eta} \in \mathcal{L}(E, F)$  en posant :

$$\forall \zeta \in E, \quad \Theta_{\xi, \eta}(\zeta) = \xi \langle \eta, \zeta \rangle.$$

La sous-algèbre fermée de  $\mathcal{L}(E, F)$  engendrée par les  $\Theta_{\xi, \eta}$  pour  $\xi \in F$  et  $\eta \in E$  est notée  $\mathcal{K}(E, F)$ . Ses éléments sont appelés les *opérateurs compacts de  $E$  vers  $F$* .



Au cours de ce mémoire, nous ferons souvent appel aux produits tensoriels intérieurs de modules hilbertiens. Notre référence sur ce sujet est le chapitre 4 de [36].

**Définition 1.25** (produit tensoriel intérieur). Soient  $A$  et  $B$ , deux  $C^*$ -algèbres,  $E_A$  et  $F_B$  deux modules hilbertiens et  $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(F_B)$  un homomorphisme. Le produit tensoriel algébrique  $E \odot_A F$  est le quotient de  $E \otimes F$  par le sous-espace engendré par

$$\{\xi a \otimes \zeta - \xi \otimes \phi(a)\zeta : \xi \in E, \zeta \in F, a \in A\}.$$

$E \odot_A F$  est un  $B$ -module pour  $(\xi \otimes \zeta)b = \xi \otimes \zeta b$ . Ce module est muni du produit scalaire à valeurs dans  $B$

$$\langle \xi_1 \otimes \zeta_1, \xi_2 \otimes \zeta_2 \rangle_B = \langle \zeta_1, \phi(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A) \zeta_2 \rangle_B.$$

Le *produit tensoriel intérieur* de  $E$  et  $F$  est le  $B$ -module hilbertien  $E \otimes_A F$  obtenu comme complété de  $E \odot_A F$  pour ce produit scalaire.

**Remarque 1.26.** Dans le cas d'un produit tensoriel intérieur, nous disposons d'un  $*$ -homomorphisme (voir [36], p.42) :

$$\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E \otimes_A F).$$

**Définition 1.27** (repère d'un module hilbertien). Soit  $E_A$  un module hilbertien. Un *repère* de  $E$  est une famille finie  $(\xi_i)$  d'éléments de  $E$  tels que :

$$\sum_i \xi_i \langle \xi_i, \cdot \rangle = \text{Id}_E.$$

**Remarque 1.28.** La démonstration de la proposition 3.9 de [47] nous prouve qu'un tel repère fini existe si et seulement si  $E$  est projectif de type fini sur  $A$ .

### 1.2.2 $C^*$ -correspondances et algèbres de Toeplitz

Dans cette sous-section, nous supposons que  $A$  et  $B$  sont des  $C^*$ -algèbres. Nous présentons la notion d'*algèbre de Toeplitz-Pimsner* ou *algèbre de Toeplitz généralisée*. Comme leur nom l'indique, ces algèbres ont été introduites par PIMSNER. Elles apparaissent pour la première fois dans l'article [41], avec les *algèbres de Pimsner*.

Ici, nous utiliserons la nomenclature de KATSURA et nous appellerons  $C^*$ -*correspondance* ce que PIMSNER nomme « bimodule hilbertien ». Nous réservons le terme de *bimodule hilbertien* à une structure dans laquelle les deux côtés sont symétriques (voir ci-dessous, la définition 1.44).

**Définition 1.29** ( $C^*$ -correspondance). Une  $C^*$ -*correspondance*  $E$  de  $A$  vers  $B$  est

- (i) un module hilbertien à droite  $E$  sur  $B$ , de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ ,
- (ii) muni d'un homomorphisme  $\phi_E: A \rightarrow \mathcal{L}_B(E)$ .

Le second point est équivalent à la condition  $\langle a\xi, \zeta \rangle_B = \langle \xi, a^*\zeta \rangle_B$ . Dans la suite, nous allégerons les notations en notant autant que possible  $\phi$  à la place de  $\phi_E$ .

Dans les énoncés qui suivent, si  $E$  est une  $C^*$ -correspondance, nous utiliserons la notation  ${}_A E_B$  comme raccourci pour signifier qu'il s'agit d'une  $C^*$ -correspondance de  $A$  vers  $B$ .

**Lemme 1.30.** *Soient  $E_B$  un module hilbertien et  ${}_B F_C$  une  $C^*$ -correspondance. Si  $(\xi_i)_i$  et  $(\eta_j)$  sont des repères de respectivement  $E$  et  $F$ , alors  $(\xi_i \otimes \eta_j)_{i,j}$  est un repère de  $E \otimes_B F$ .*

*Démonstration.* Partons de

$$\sum_i \xi_i \langle \xi_i, \cdot \rangle_B = \text{Id}_E \quad \sum_j \eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle_C = \text{Id}_F.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \xi_i \otimes \eta_j \cdot \langle \xi_i \otimes \eta_j, \xi \otimes \eta \rangle_C &= \sum_{i,j} \xi_i \otimes \eta_j \cdot \langle \eta_j, \langle \xi_i, \xi \rangle_B \cdot \eta \rangle_C = \\ &= \sum_i \xi_i \otimes \langle \xi_i, \xi \rangle_B \cdot \eta = \sum_i \xi_i \cdot \langle \xi_i, \xi \rangle_B \otimes \eta = \xi \otimes \eta, \end{aligned}$$

qui prouve que  $(\xi_i \otimes \eta_j)_{i,j}$  est un repère de  $E \otimes_B F$ .  $\square$

La définition suivante provient essentiellement du théorème 3.4 de [41].

**Définition 1.31** (représentation de  $C^*$ -correspondance). Une *représentation de la  $C^*$ -correspondance*  ${}_A E_A$  sur une  $C^*$ -algèbre  $B$  est une paire  $(\pi, \mathcal{T})$  constituée :

- d'un homomorphisme d'algèbres  $\pi: A \rightarrow B$  ;
- d'une application linéaire  $\mathcal{T}: E \rightarrow B$  qui vérifie

- (i)  $\mathcal{T}(\xi)^* \mathcal{T}(\zeta) = \pi(\langle \xi, \zeta \rangle_A)$ ,
- (ii)  $\mathcal{T}(\xi) \pi(a) = \mathcal{T}(\xi a)$ ,
- (iii)  $\pi(a) \mathcal{T}(\xi) = \mathcal{T}(\phi(a) \xi)$ .

Une représentation d'une  $C^*$ -correspondance  $E$  est dite *injective* si  $\pi$  est injectif.

Nous empruntons à [33] (voir la définition 2.1) la remarque suivante :

**Remarque 1.32.** Si le point (i) est vérifié alors le point (ii) l'est également. En effet, l'expression

$$\|\mathcal{T}(\xi) \pi(a) - \mathcal{T}(\xi a)\|^2 = \|(\mathcal{T}(\xi) \pi(a) - \mathcal{T}(\xi a))^* (\mathcal{T}(\xi) \pi(a) - \mathcal{T}(\xi a))\|$$

se développe et le point (i) permet de se ramener à une expression ne comportant que des  $\pi(x)$ , qui est nulle, grâce aux propriétés de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .

**Notation 1.33.** Une représentation  $(\pi, \mathcal{T})$  sur  $B$  étant donnée, on note  $C^*(\pi, \mathcal{T})$  la  $C^*$ -algèbre associée, qui est la  $C^*$ -algèbre engendrée par  $\pi(A) \cup \mathcal{T}(E)$  dans  $B$ .

La définition précédente nous permet d'introduire l'algèbre de Toeplitz associée à une  $C^*$ -correspondance :

**Définition 1.34.** L'algèbre de Toeplitz généralisée ou algèbre de Toeplitz-Pimsner  $\mathcal{T}_E^A$  associée à la  $C^*$ -correspondance  ${}_A E_A$  est la  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par les représentations de  ${}_A E_A$ , au sens où (voir [9], II.8.3) :

- il existe une représentation  $(\bar{\pi}_E, \bar{\mathcal{T}}_E)$  de  $E$  sur  $\mathcal{T}_E^A$  ;
- $\mathcal{T}_E^A$  est générée comme  $C^*$ -algèbre par  $\bar{\pi}_E(A) \cup \bar{\mathcal{T}}_E(E)$  ;
- pour toute représentation  $(\pi, \mathcal{T})$  de  $E$  sur  $B$ , il existe un morphisme  $\rho_{(\pi, \mathcal{T})} : \mathcal{T}_E^A \rightarrow B$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A & & B \\
 \searrow \bar{\pi}_E & \nearrow \rho_{(\pi, \mathcal{T})} & \\
 & \mathcal{T}_E & \\
 \nearrow \bar{\mathcal{T}}_E & \searrow \mathcal{T} & \\
 E & & 
 \end{array}$$

L'algèbre  $A$  est appelée *algèbre des coefficients* ou encore *algèbre de base* de  $\mathcal{T}_E^A$ .

Dans la suite, nous écrirons  $\mathcal{T}_E$  à la place de  $\mathcal{T}_E^A$  si le contexte le permet.

Pour prouver que l'algèbre universelle existe ([9], II.8.3), il faut d'une part prouver que les générateurs sont bornés, et d'autre part qu'une représentation de la  $C^*$ -correspondance  $E$  existe.

- Montrons d'abord que les normes des générateurs sont majorées. Pour les  $\pi(a)$ , c'est évident. Pour les  $\xi$ , nous pouvons utiliser l'estimation

$$\|\mathcal{T}(\xi)\|^2 = \|\mathcal{T}(\xi)^* \mathcal{T}(\xi)\| = \|\pi(\langle \xi, \xi \rangle)\| \leq \|\xi\|,$$

où  $\|\xi\|$  est la norme de module hilbertien.

- La proposition 1.3 de [41] nous assure de l'existence d'au moins une représentation de  $\mathcal{T}_E^A$ .

Dans la suite, nous abrègerons les notations en écrivant  $\mathcal{T}_\xi$  à la place de  $\bar{\mathcal{T}}_E(\xi)$ . De même, nous identifierons  $a$  et  $\pi(a)$  lorsque le contexte est clair.

**Remarque 1.35.** La définition d'une représentation de  $C^*$ -correspondance permet de voir facilement que l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme

$$\mathcal{T}_{\xi_1} \cdots \mathcal{T}_{\xi_k} \mathcal{T}_{\zeta_1}^* \cdots \mathcal{T}_{\zeta_l}^* \quad (1.2)$$

est dense dans  $\mathcal{T}_E$  (voir [41], lemme 3.1). Les éléments de  $\mathcal{T}_E$  qui peuvent s'écrire sous cette forme sont appelés *mots réduits*.

La remarque 4.10 (2) de [41] suggère la définition suivante :

**Définition 1.36** (automorphisme de  $C^*$ -correspondance). Un *automorphisme de  $C^*$ -correspondance* est une paire  $(\Gamma, \gamma)$ , où

- $\Gamma : E \rightarrow E$  est une application linéaire inversible,

–  $\gamma: A \rightarrow A$  est  $*$ -automorphisme,  
qui satisfait :

- (i)  $\Gamma(\xi a) = \Gamma(\xi)\gamma(a)$ ,
- (ii)  $\langle \Gamma(\xi), \Gamma(\eta) \rangle_A = \gamma(\langle \xi, \eta \rangle_A)$ ,
- (iii)  $\Gamma(\phi(a)\xi) = \phi(\gamma(a))\Gamma(\xi)$ .

Nous pouvons énoncer la remarque 4.10.(2) de [41] :

**Remarque 1.37.** Tout automorphisme de  $C^*$ -correspondance induit un automorphisme de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{T}_E$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la paire  $(\Gamma_t, \text{Id}_A)$ , où  $\Gamma_t: E \rightarrow E$  est donné par

$$\Gamma_t(\xi) = e^{i2\pi t}\xi,$$

est un automorphisme de la  $C^*$ -correspondance  $E$ . Il est clair que  $\Gamma_1 = \Gamma_0$ , ce qui permet de construire une action de  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . L'action induite sur  $\mathcal{T}_E$  a une importance toute particulière :

**Définition 1.38** (action de jauge). L'action de jauge de l'algèbre de Toeplitz  $\mathcal{T}_E$  est l'action du groupe  $S^1$  induite sur  $\mathcal{T}_E$  par les  $(\Gamma_t, \text{Id}_A)$ . Nous noterons  $\bar{\gamma}_t$  cette action de jauge.

Nous suivons la notation 1.18 et écrivons  $\mathcal{T}_E^{(n)}$  pour l'ensemble des éléments de degré  $n$  de  $\mathcal{T}_E$ . Nous induisons de cette façon une *gradation* sur l'algèbre de Toeplitz.  $\bar{\gamma}$  est isométrique comme automorphisme d'une  $C^*$ -algèbre. Il est clair que les mots réduits sont des éléments homogènes, et par définition, ils sont denses dans  $\mathcal{T}_E$ . La remarque 1.19 nous assure donc que

**Remarque 1.39.** Soit  $\mathcal{T}_E$  une algèbre de Toeplitz. L'action de jauge  $\bar{\gamma}$  sur  $\mathcal{T}_E$  est continue point par point.

Nous allons maintenant présenter le théorème d'invariance de jauge. Nous suivrons l'exposition de [33]. Pour énoncer le théorème, nous aurons besoin du lemme et des définitions suivants :

**Lemme 1.40** (lemme 3.2, [41]). Si  ${}_A E_A$  est une  $C^*$ -correspondance et  $(\pi, \mathcal{T})$  est une représentation de  $E$  sur  $B$ , il existe un homomorphisme  $\pi^{(1)}: \mathcal{K}(E) \rightarrow B$  qui satisfait :

$$\pi^{(1)}(\Theta_{\xi, \zeta}) = \mathcal{T}(\xi)\mathcal{T}(\zeta)^*,$$

en utilisant les notations de la définition 1.24.

**Définition 1.41** (action de jauge d'une représentation). Soit  ${}_A E_A$  une  $C^*$ -correspondance. Une représentation  $(\pi, \mathcal{T})$  de  $E$  admet une action de jauge si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un homomorphisme  $\beta_t: C^*(\pi, \mathcal{T}) \rightarrow C^*(\pi, \mathcal{T})$  tel que  $\beta_t(\pi(a)) = \pi(a)$  et  $\beta_t(\mathcal{T}(\xi)) = e^{i2\pi t}\mathcal{T}(\xi)$ , quels que soient  $a \in A$  et  $\xi \in E$ .

**Notation 1.42.** Soit  ${}_AE_A$  une  $C^*$ -correspondance et  $(\pi, \mathcal{T})$  une représentation de  $E$ . On note

$$I'_{(\pi, \mathcal{T})} = \left\{ a \in A \mid \pi(a) \in \pi^{(1)}(\mathcal{K}(E)) \right\}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème 6.2 de [33] :

**Théorème 1.43** (d'invariance de jauge). *Soit  ${}_AE_A$  une  $C^*$ -correspondance. Si  $(\pi, \mathcal{T})$  est une représentation de  $E$ , la surjection  $\rho: \mathcal{T}_E \rightarrow C^*(\pi, \mathcal{T})$  est un isomorphisme si et seulement si  $(\pi, \mathcal{T})$  vérifie  $I'_{(\pi, \mathcal{T})} = 0$  et admet une action de jauge.*

Notons qu'il existe des représentations injectives qui n'admettent pas d'actions de jauge : si nous prenons  $A = \mathbb{C}$  et  $E = \mathbb{C}$ , nous définissons une représentation *injective* de  $E$  sur  $\mathbb{C}$  en posant  $\pi = \text{Id}$  et  $\mathcal{T} = \text{Id}$ . Il est alors clair que  $C^*(\pi, \mathcal{T}) = \mathbb{C}$ , qui n'admet pas d'action de jauge.

### 1.2.3 Bimodules hilbertiens et produits croisés généralisés

Dans cette section, nous étudierons les bimodules hilbertiens, qui sont des cas particuliers de  $C^*$ -correspondance. Là encore,  $A$  et  $B$  sont des  $C^*$ -algèbres.

**Définition 1.44** (bimodule hilbertien).  $E$  est un  $C^*$ -bimodule ou *bimodule hilbertien* sur  $A$ - $B$  si

- (i)  $E$  est un  $A$ - $B$ -bimodule (algébrique) ;
- (ii)  $E_B$  est un module hilbertien à droite pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  ;
- (iii)  ${}_AE$  est un module hilbertien à gauche pour le produit scalaire  ${}_A\langle \cdot, \cdot \rangle$  ;
- (iv) les deux produits scalaires satisfont la relation de compatibilité :

$$\xi_1 \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_B = {}_A\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \xi_3,$$

valable pour tous  $\xi_1, \xi_2$  et  $\xi_3$  de  $E$ .

Notons que la définition de « bimodule hilbertien » utilisée dans [41] correspond à *notre* définition de «  $C^*$ -correspondances » (voir la définition 1.29).

**Définition 1.45** (opposé d'un bimodule ([9], II.7.6.5.(v))). Un bimodule hilbertien  $E$  sur  $A$  étant donné, le *bimodule opposé* ou *bimodule dual*  $E^*$  ou  $E^{\otimes -1}$  est

$$E^* = \{ \xi^* \mid \xi \in E \}$$

muni de la somme  $\xi^* + \zeta^* = (\xi + \zeta)^*$ , des produits  $b\xi^*a = (a^*\xi b^*)^*$  et de

$${}_A\langle \xi^*, \zeta^* \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle_A \qquad \langle \xi^*, \zeta^* \rangle_A = {}_A\langle \zeta, \xi \rangle.$$

La définition des produits sur  $E^*$  indique la structure d'espace vectoriel qu'il faut utiliser sur  $E^*$ .

**Remarque 1.46.** Si  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sont des éléments d'un bimodule  ${}_A E_B$  tels que  $\sum_i {}_A \langle \xi_i, \xi_i \rangle = 1$ , alors la famille  $(\xi_i)$  est un repère de  $E_B$  :

$$\xi = \left( \sum_i {}_A \langle \xi_i, \xi_i \rangle \right) \xi = \sum_i \xi_i \langle \xi_i, \xi \rangle_B.$$

**Lemme 1.47.** Si  ${}_A E_B$  et  ${}_B F_C$  sont deux bimodules hilbertiens, alors leur produit tensoriel intérieur  ${}_A E \otimes_B {}_B F_C$  est un bimodule hilbertien.

*Démonstration.* Vérifions la définition point par point :

- (i) il est clair que  $E \otimes_B F$  est un bimodule algébrique ;
- (ii)  $(E \otimes_B F)_C$  est un module hilbertien pour le produit scalaire

$$\langle \xi_1 \otimes \zeta_1, \xi_2 \otimes \zeta_2 \rangle_C = \langle \zeta_1, \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_B \cdot \zeta_2 \rangle_C;$$

- (iii)  ${}_A(E \otimes_B F)$  est un module hilbertien pour le produit scalaire

$${}_A \langle \xi_1 \otimes \zeta_1, \xi_2 \otimes \zeta_2 \rangle = {}_A \langle \xi_1 \cdot {}_B \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle, \xi_2 \rangle.$$

Il nous suffit donc de vérifier que ces deux produits scalaires sont compatibles au sens de

$$\xi_1 \otimes \zeta_1 \cdot \langle \xi_2 \otimes \eta_2, \xi_3 \otimes \eta_3 \rangle_C = {}_A \langle \xi_1 \otimes \zeta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle \cdot \xi_3 \otimes \eta_3.$$

Or

$$\begin{aligned} \xi_1 \otimes \zeta_1 \cdot \langle \xi_2 \otimes \eta_2, \xi_3 \otimes \eta_3 \rangle_C &= \xi_1 \otimes \zeta_1 \cdot \langle \zeta_2, \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_B \cdot \zeta_3 \rangle_C = \\ &= \xi_1 \otimes (\zeta_1 \cdot \langle \zeta_2, \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_B \cdot \zeta_3 \rangle_C) = \xi_1 \otimes ({}_B \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle \cdot (\langle \xi_2, \xi_3 \rangle_B \cdot \zeta_3)) = \\ &= (\xi_1 \cdot {}_B \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle) \otimes (\langle \xi_2, \xi_3 \rangle_B \cdot \zeta_3) = (\xi_1 \cdot {}_B \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle) \cdot \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_B \otimes \zeta_3 = \\ &= {}_A \langle \xi_1 \cdot {}_B \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle, \xi_2 \rangle \cdot \xi_3 \otimes \zeta_3 = {}_A \langle \xi_1 \otimes \zeta_1, \xi_2 \otimes \zeta_2 \rangle \cdot \xi_3 \otimes \zeta_3. \end{aligned}$$

Ainsi,  $E \otimes_B F$  est un  $A$ - $C$ -bimodule hilbertien. □

Nous utiliserons les définitions suivantes de [6] (déf. 2.1 et 2.4) :

**Définition 1.48.** Soit  ${}_A E_A$  une  $A$ - $A$ -bimodule hilbertien. Une *représentation covariante* ou *représentation de bimodule hilbertien* de  $E$  sur une  $C^*$ -algèbre  $B$  est une paire  $(\pi, S)$  constituée :

- d'un homomorphisme d'algèbres  $\pi: A \rightarrow B$  ;
- d'une application linéaire  $S: E \rightarrow B$  qui vérifie

$$\begin{aligned} (i) \quad S(\xi)^* S(\zeta) &= \pi(\langle \xi, \zeta \rangle_A) & (ii) \quad S(\xi) \pi(a) &= S(\xi a) \\ (iii) \quad \pi(a) S(\xi) &= S(a \xi) & (iv) \quad S(\xi) S(\zeta)^* &= \pi({}_A \langle \xi, \zeta \rangle). \end{aligned}$$

**Remarque 1.49.** La remarque 1.32 s'étend au cas des représentations de bimodules hilbertiens : en utilisant l'égalité

$$\|\pi(a)S(\xi) - S(a\xi)\|^2 = \|(\pi(a)S(\xi) - S(a\xi))(\pi(a)S(\xi) - S(a\xi))^*\|,$$

on peut prouver que le point (iv) implique le point (iii). Il suffit donc de vérifier les points (i) et (iv) pour avoir une représentation covariante.

La  $C^*$ -algèbre associée aux représentations covariantes est :

**Définition 1.50** (produit croisé généralisé). Soit  ${}_A E_A$  une  $A$ - $A$ -bimodule hilbertien. Le *produit croisé généralisé*  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  de  $A$  par  $E$  est la  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par les représentations covariantes de  ${}_A E_A$ , au sens où (voir [9], II.8.3) :

- il existe une représentation  $(\pi_E, S_E)$  de  $E$  sur  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  ;
- $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  est générée par  $\pi_E(A) \cup S_E(E)$  ;
- pour toute représentation covariante  $(\pi, S)$  de  $E$  sur  $B$ , il existe un homomorphisme  $\rho_{(\pi, S)} : A \rtimes_E \mathbb{Z} \rightarrow B$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & \\
 \searrow \pi_E & & \xrightarrow{\pi} & & \\
 & A \rtimes_E \mathbb{Z} & \xrightarrow{\rho_{(\pi, S)}} & & B \\
 \nearrow S_E & & \nwarrow S & & \\
 E & & & & 
 \end{array}$$

Pour prouver l'existence d'une telle  $C^*$ -algèbre universelle, bornons les générateurs : une représentation covariante étant en particulier une représentation de  $C^*$ -correspondance, les normes des générateurs sont majorées comme dans la définition 1.34. Pour l'existence, nous nous référons au début de la section 2 de [6].

Pour réduire les notations, nous identifions  $\pi_E(a)$  et  $a$  à chaque fois que c'est possible. De même, nous écrirons  $S_\xi$  au lieu de  $S_E(\xi)$ .

**Remarque 1.51.** Étant donné un bimodule hilbertien  ${}_A E_A$ , il est clair qu'il existe une surjection de  $\mathcal{T}_E$  sur  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . En utilisant le point (iv) de la définition 1.48, il apparaît que les combinaisons linéaires (finies) de

$$S_{\xi_1} \cdots S_{\xi_k}, \quad a, \quad S_{\eta_1}^* \cdots S_{\eta_l}^*$$

sont denses dans  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ .

**Remarque 1.52.** Pour prolonger la remarque ci-dessus, nous voyons qu'en reprenant la notation 1.18,  $(A \rtimes_E \mathbb{Z})^{(0)} = A$ . En fait, une classe plus générale d'*algèbres de Pimsner* peut être définie (voir [41] et [32]) dont les produits croisés généralisés sont des exemples. Au sein de cette classe, dont les éléments sont notés  $\mathcal{O}_E$ , la propriété  $\mathcal{O}_E^{(0)} = A$  est caractéristique des produits croisés généralisés (voir la proposition 5.18 de [33]).

Enfin, nous aurons besoin du théorème d'invariance de jauge pour les produits croisés généralisés – qui sont des cas particuliers d'algèbres de Pimsner au sens de Katsura. En voici l'énoncé (voir [33], théorème 6.4) :

**Théorème 1.53** (invariance de jauge pour les algèbres de Pimsner). *Soit  $(\pi, S)$  une représentation covariante. La surjection  $A \rtimes_E \mathbb{Z} \rightarrow C^*(\pi, S)$  est un isomorphisme si et seulement si  $(\pi, S)$  est injective et admet une action de jauge.*

## 1.3 Groupes de Lie et cohomologie cyclique

Cette section étudie les relations entre groupes de Lie, cohomologie cyclique et produits croisés généralisés lisses. Il s'agit dans un premier temps de rappeler qu'une action d'un groupe de Lie sur une  $C^*$ -algèbre définit une « sous-algèbre lisse canonique » ainsi que des cocycles cycliques sur cette algèbre – ce qui nous sera utile au chapitre 3. Dans un second temps, nous préparons le terrain pour la suite de ce mémoire, en prouvant que ces algèbres lisses sont compatibles avec le cadre du chapitre 2.

Notons qu'une théorie des « produits croisés généralisés lisses » plus générale que la présente est parfaitement possible. Cependant, nous n'avons pas réussi à isoler de normes *naturelles* pour les algèbres de cette théorie générale, c'est pourquoi nous ne présentons ici que le cas d'une action de groupe de Lie.

### 1.3.1 Groupes de Lie et algèbres localement convexes

**Définition 1.54** (élément  $G$ -régulier). Soit  $X$  un espace localement convexe muni d'une action d'un groupe de Lie  $G$ . Un élément  $x \in X$  est dit  $G$ -régulier si la fonction  $G \rightarrow X$  induite par  $x, g \mapsto \alpha_g(x)$ , est dans  $C^\infty(G \rightarrow X)$ .

Cette définition a un sens car  $G$  est une variété.  $g \mapsto \alpha_g(x)$  est donc une fonction d'une variété dans un espace localement convexe.

**Définition 1.55.** Dans le cas particulier d'une action de jauge  $\gamma: S^1 \curvearrowright X$ , on parlera d'éléments *jauge-réguliers*.

**Définition 1.56** (sous-algèbre lisse). Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Une *sous-algèbre lisse*  $\mathcal{A}$  de  $A$  est une sous-algèbre dense de  $A$  qui est stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Dans [47], ces algèbres sont appelées *pré- $C^*$ -algèbres*, mais cette nomenclature nous paraît ambiguë : il serait plus naturel qu'une pré- $C^*$ -algèbre soit juste une algèbre dotée d'une involution  $*$ .

Spécialiser la construction précédente en prenant comme une  $C^*$ -algèbre  $A$  comme espace  $X$  nous permet de construire une algèbre localement convexe à partir de  $A$ . Plus précisément, nous disposons de la proposition suivante ([47], proposition 3.45 p.138) :

**Proposition 1.57.** *Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre,  $G$  un groupe de Lie et  $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(A)$  une action continue point par point. La sous-algèbre  $\mathcal{A}$  des éléments  $G$ -réguliers est une sous-algèbre lisse de  $A$ .  $\mathcal{A}$  est en outre une algèbre de Fréchet.*



Le théorème 3.44 p. 138 de [47] montre que sous certaines hypothèses les sous-algèbres lisses ont la même  $K$ -théorie que leurs  $C^*$ -complétions :

**Théorème 1.58.** *Si  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $\mathcal{A}$  sous-algèbre lisse de  $A$  qui est une algèbre de Fréchet, alors l'inclusion  $i : \mathcal{A} \hookrightarrow A$  induit un isomorphisme  $K_0 i : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow K_0(A)$ .*

### 1.3.2 Cohomologie cyclique et génération de cocycles

Dans cette sous-section, nous prouvons que si nous disposons d'une action d'un groupe de Lie (de dimension finie) sur une  $C^*$ -algèbre, on peut facilement construire une famille de cocycles cycliques sur la sous-algèbre lisse associée de la  $C^*$ -algèbre.

Nous commençons par rassembler des définitions et des résultats sur la cohomologie cyclique. Nous suivons la présentation de [15]. La définition de la cohomologie cyclique est donnée dans [15] III.1 p.182 :

**Définition 1.59.** La *cohomologie cyclique* d'une algèbre  $\mathcal{A}$  est la cohomologie du complexe  $(C_\lambda^n, b)$ , où  $C_\lambda^n$  est l'ensemble des formes  $(n+1)$ -linéaires  $\phi$  sur  $\mathcal{A}$  qui vérifient la *condition de cyclicité* :

$$\phi(a^0, a^1, \dots, a^n) = (-1)^n \phi(a^n, a^0, \dots, a^n),$$

et la différentielle  $b$  est donnée par :

$$\begin{aligned} b\phi(a^0, \dots, a^n, a^{n+1}) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \phi(a^0, \dots, a^j a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \phi(a^{n+1} a^0, \dots, a^n). \end{aligned}$$

L'ensemble des cochaines fermées au sens de  $C_\lambda^n$  est noté  $ZC^n(\mathcal{A})$ . Ses éléments sont appelés des *cocycles cycliques*.

Dans le cas d'une algèbre localement convexe, on demande en plus que les formes multi-linéaires soient *continues*.

À chaque cocycle cyclique est associée une sorte de « calcul différentiel » sur l'algèbre  $\mathcal{A}$  (voir [13], p.313 et [15], III.1.α définition 1) :

**Définition 1.60 (cycle).** Un *cycle de dimension  $n$*  est un triplet  $(\Omega, d, f)$  où  $\Omega = \bigoplus_{j=0}^n \Omega^j$  est une algèbre graduée,  $d$  est une dérivation graduée de degré 1 telle que  $d^2 = 0$  et  $f : \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une trace graduée et fermée sur  $\Omega$ .

Un *cycle sur  $\mathcal{A}$*  est donné par un cycle  $(\Omega, d, f)$  et un homomorphisme  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^0$ .

En d'autres termes, les objets considérés vérifient :

- $\Omega^i \Omega^j \subseteq \Omega^{i+j}$  ;
- $d\Omega^j \subseteq \Omega^{j+1}$  avec  $d(\omega\omega') = d\omega\omega' + (-1)^{\deg \omega} \omega d\omega'$  ;
- la trace satisfait :

$$\int d\omega = 0 \qquad \int \omega_1 \omega_2 = (-1)^{\deg \omega_1 \deg \omega_2} \int \omega_2 \omega_1.$$

**Définition 1.61** (caractère d'un cycle). Le *caractère* d'un cycle  $(\Omega, d, f)$  est la  $(n+1)$ -forme  $\phi$  sur  $\mathcal{A}$  d'expression

$$\phi(a^0, \dots, a^n) = \int \rho(a^0) d(\rho(a^1)) \cdots d(\rho(a^n)).$$

Le caractère d'un cycle définit essentiellement ce cycle. Le lien entre cocycles cycliques et caractères est donné par la proposition III.1.4 de [15], que nous adaptons à notre situation :

**Proposition 1.62.** *Si  $\phi$  est une  $(n+1)$ -forme sur  $\mathcal{A}$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\phi$  est le caractère d'un cycle de dimension  $n$   $(\Omega, d, f)$  sur  $\mathcal{A}$  ;
- $\phi$  est un cocycle cyclique sur  $\mathcal{A}$ .

Pour construire des cocycles cycliques à partir d'une action de groupe de Lie, nous aurons besoin de la notion de *générateur infinitésimal* d'une action de groupe de Lie. Nous suivons le II.5.5.17 (ii) p. 100 de [9] pour définir ces générateurs :

**Définition 1.63** (générateurs infinitésimaux). Soit  $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright A$  une action continue point par point. Le *générateur infinitésimal* de  $\alpha$  est la dérivation  $\partial$  :

$$\partial(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t(a) - a}{t},$$

qui est définie sur une sous-algèbre involutive dense de  $A$ . Comme  $\partial(a^*) = \partial(a)^*$ ,  $\partial$  est une *dérivation auto-adjointe*.

On peut adapter cette définition au cas plus général d'un groupe de Lie  $G$  de dimension finie, en considérant ses sous-groupes à 1-paramètre.

La définition et la proposition suivantes sont des adaptations de la construction de [15], III.6, exemple 12 c) p.254 : soit  $A$  une algèbre de Banach équipée d'une action  $\alpha$  d'un groupe de Lie  $G$ , continue point par point. Nous notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des éléments  $G$ -lisses de  $A$  et  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie associée à  $G$ . Il est clair que  $\mathcal{G}$  agit par dérivations sur  $\mathcal{A}$ , ce qui donne un sens à  $\partial a$ , pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $\partial \in \mathcal{G}$ .

**Définition 1.64** (algèbre différentielle pour une action d'un groupe de Lie). L'*algèbre différentielle*  $\Omega_G$  associée à l'action  $\alpha$  est l'algèbre différentielle graduée des formes antisymétriques sur  $\mathcal{G}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$  équipée de la différentielle  $d$  :

$$\begin{aligned} d\omega(\partial_1, \dots, \partial_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \partial_i \omega(\partial_1, \dots, \check{\partial}_i, \dots, \partial_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\partial_i, \partial_j], \partial_1, \dots, \check{\partial}_i, \dots, \check{\partial}_j, \dots, \partial_{n+1}), \end{aligned}$$

où les  $\partial_i$  sont des éléments de  $\mathcal{G}$ . Le produit sur  $\Omega_G$  provient de l'égalité  $\Omega_G^i = \mathcal{A} \otimes \Lambda^i(\mathcal{G}^*)$ .

La proposition suivante est une reformulation de la propriété décrite dans [15], p.255. Là encore, nous l'avons simplifiée pour l'adapter à notre cas :

**Proposition 1.65.** *Si  $\tau$  est une trace  $G$ -invariante sur  $A$  et  $\rho = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k \in \Lambda^k \mathcal{G}$  vérifie*

$$\sum_{i < j} (-1)^{i+j} [\xi_i, \xi_j] \wedge \xi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_j \wedge \cdots \wedge \xi_n = 0, \quad (1.3)$$

alors

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \tau(a_0 \xi_{\sigma(1)}(a_1) \cdots \xi_{\sigma(n)}(a_n)) \quad (1.4)$$

est un cocycle cyclique sur  $\mathcal{A}$ .

Notons que la condition (1.3) est essentiellement une condition homologique. En suivant toujours III.6 exemple 12 c) p.254 nous voyons que tous les cycles associés aux cocycles cycliques (1.4) utilisent  $\Omega_G^*$  comme algèbre graduée. Le seul élément qui change est la trace : si  $\varphi$  est un cocycle associé à  $\rho \in \Lambda^k \mathcal{G}^*$ , alors  $\int$  est donnée par :

$$\int \omega = \tau(\omega(\rho)).$$

Pour la construction de ce cycle, on peut aussi se référer à [14], pp.89–90.

### 1.3.3 Connexions

Dans cette sous-section, nous reprendrons essentiellement les résultats de [12] en les formulant dans le cadre de la cohomologie cyclique. Si un module hilbertien  $E_A$  est doté d'une action de module hilbertien d'un groupe de Lie  $G$ , alors on obtient naturellement des connexions sur  $E$ , qui sont associées aux cocycles cycliques sur  $A$  engendrés par l'action de  $G$ .

Rappelons la définition suivante ([15], III.3. définition 5) :

**Définition 1.66** (connexion). Soit  $\mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Omega$  un cycle sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  un module projectif de type fini sur  $\mathcal{A}$ . Une *connexion*  $\nabla$  sur  $\mathcal{E}$  est une application linéaire  $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1$  telle que :

$$\forall \xi \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}, \nabla(\xi a) = (\nabla \xi)a + \xi \otimes d\rho(a).$$

Remarquons que dans la définition ci-dessus, la trace  $\int$  du cycle ne joue en fait aucun rôle. Cette définition pourrait s'adapter à n'importe quelle « algèbre différentielle graduée sur  $\mathcal{A}$  ».

**Définition 1.67** (action de module hilbertien). Soit  $E_A$  un module sur une  $C^*$ -algèbre  $A$ . Une *action de module* d'un groupe de Lie  $G$  sur  $E_A$  est une paire  $(\alpha, \beta)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des actions de  $G$  sur  $A$  et  $E$  respectivement, qui satisfont

$$(i) \quad \beta_g(\xi a) = \beta_g(\xi) \alpha_g(a),$$

quels que soient  $\xi, \eta \in E, a \in A$  et  $g \in G$ .

Si  $E$  est module hilbertien,  $(\alpha, \beta)$  est une *action de module hilbertien* si en outre

$$(ii) \quad \langle \beta_g(\xi), \beta_g(\zeta) \rangle = \alpha_g(\langle \xi, \zeta \rangle).$$

Si nous disposons d'une telle action de module hilbertien,

- nous pouvons définir une « version lisse » du module sur la « version lisse » de l'algèbre ;
- le module lisse est équipé d'une connexion.

Pour formaliser les propriétés énoncées ci-dessus :

**Proposition 1.68.** *Soit  $(\alpha, \beta)$  une action de module d'un groupe de Lie  $G$  sur  $E_A$  qui est continue point par point. Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{E} \subseteq E$  défini par*

$$\mathcal{E} = \{ \xi \in E : g \mapsto \beta_g(\xi) \text{ est dans } C^\infty(G \rightarrow E) \}$$

*possède naturellement une action à droite de  $\mathcal{A} \subseteq A$  ainsi qu'une connexion  $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{G}^*$  sur l'algèbre différentielle  $\Omega_G$ .  $\nabla$  est donnée par*

$$\forall \partial \in \mathcal{G}^*, \quad \nabla_{\partial} \xi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\beta_{e^{t\partial}}(\xi) - \xi}{t}.$$

*Si en outre,  $E_A$  est un module hilbertien et si  $(\alpha, \beta)$  est une action de module hilbertien, alors*

- le produit scalaire de  $E$  se restreint en  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$  ;
- $\mathcal{E}$  est une partie dense du module hilbertien  $E$  ;
- dès que  $E$  est projectif de type fini sur  $A$ , il existe un repère pour  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{A}$  – et  $\mathcal{E}$  est donc projectif de type fini sur  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* La condition (i) de la définition 1.67 montre que  $\mathcal{E}$  est un module sur  $\mathcal{A}$ . Établissons maintenant que  $\nabla$  est une connexion :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial}(\xi a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\beta_{e^{t\partial}}(\xi a) - \xi a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\beta_{e^{t\partial}}(\xi) \alpha_{e^{t\partial}}(a) - \xi a}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\beta_{e^{t\partial}}(\xi) \alpha_{e^{t\partial}}(a) - \xi \alpha_{e^{t\partial}}(a) + \xi \alpha_{e^{t\partial}}(a) - \xi a) = (\nabla_{\partial} \xi) a + \xi \partial_{\partial}(a). \end{aligned}$$

Pour l'instant, nous n'avons pas utilisé la structure de module hilbertien sur  $E$ . La propriété de restriction du produit scalaire est évidente en utilisant le point (ii) de la définition 1.67.

Montrons maintenant que nous pouvons « perturber » n'importe quel élément  $\xi \in E$  pour obtenir un  $\xi' \in \mathcal{E}$  arbitrairement proche (au sens de la norme du module hilbertien) : il suffit de prendre le produit de convolution

$$\xi' = \int f(g) \beta_g(\xi) dg$$

pour une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  suffisamment régulière.  $E$  étant projectif de type fini, la remarque 1.28 montre qu'il existe un repère  $(\eta_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  de  $E$ , c'est-à-dire que  $\text{Id}_E = \sum_i \eta_i \langle \eta_i, \cdot \rangle_A$ . Nous pouvons donc perturber les  $\eta_i$  en des  $\eta'_i$  tels que  $\eta'_i \in \mathcal{E}$ .

L'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes du module  $E_A$  est équipée d'une action de  $G$  par  $\text{Ad } \beta_g$ . En considérant le repère  $(\eta_\iota)$  nous voyons que pour tout  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $T(\xi) = \sum_\iota (T\eta_\iota) \langle \eta_\iota, \xi \rangle$ . En utilisant les relations de la définition 1.67, il vient

$$\begin{aligned} \text{Ad } \beta_g(T)(\xi) &= \beta_g \left( \sum_\iota (T\eta_\iota) \langle \eta_\iota, \beta_{g^{-1}}(\xi) \rangle \right) = \\ &= \sum_\iota \beta_g(T\eta_\iota) \alpha_g(\langle \eta_\iota, \beta_{g^{-1}}(\xi) \rangle) = \sum_\iota \beta_g(T\eta_\iota) \langle \beta_g(\eta_\iota), \xi \rangle, \end{aligned}$$

qui prouve que  $\text{Ad } \beta_g$  est continue point par point dès que  $\beta_g$  l'est.

Si nous reprenons les vecteurs  $(\eta'_\iota)$  construits ci-dessus, un calcul similaire nous assure que  $T = \sum_\iota \eta'_\iota \langle \eta'_\iota, \cdot \rangle_A$  est un élément  $G$ -lisse de  $\mathcal{L}(E)$ , puisque les  $\eta'_\iota$  sont  $G$ -lisses. Par construction,  $T$  est auto-adjoint et arbitrairement proche de  $\text{Id}_E$ . On peut donc supposer  $T$  inversible et positif. L'algèbre  $\mathcal{L}(E)^\infty$  des éléments  $G$ -lisses de  $\mathcal{L}(E)$  est stable sous calcul fonctionnel holomorphe (voir la proposition 1.57), il apparaît donc que  $T^{-1/2} \in \mathcal{L}(E_A)^\infty$ .

Les  $\xi_\iota = T^{-1/2} \eta'_\iota \in \mathcal{E}$  forment un repère de  $E$  : en effet, partons de  $T = \sum_\iota \eta'_\iota \langle \eta'_\iota, \cdot \rangle$ . Pré- et post-composons par  $T^{-1/2}$  :

$$\text{Id}_E = \sum_\iota T^{-1/2} \eta'_\iota \langle \eta'_\iota, T^{-1/2} \cdot \rangle.$$

Comme  $T$  (et donc  $T^{-1/2}$ ) est auto-adjoint, les  $\xi_\iota$  forment un repère de  $E$ . La relation  $T^{-1/2} \eta'_\iota \in \mathcal{E}$  vient de ce que  $T^{-1/2}$  et  $\eta'_\iota$  sont  $G$ -lisses.  $\square$

Une connexion sur un module hilbertien permet de calculer facilement l'appariement de ce module avec un cocycle cyclique. Rappelons les résultats suivants (voir [15] III.3) :

**Proposition 1.69.** *Soit  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  un module projectif de type fini sur  $\mathcal{A}$ . Supposons que nous disposions d'un cycle  $(\Omega, d, f)$  sur  $\mathcal{A}$  :*

1.  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega$  est un  $\Omega$ -module projectif de type fini ;
2. toute connexion  $\nabla$  s'étend de façon unique en une application linéaire de  $\tilde{\mathcal{E}}$  dans lui-même qui vérifie :

$$\forall \xi \in \mathcal{E}, \omega \in \Omega, \quad \nabla(\xi \otimes \omega) = (\nabla \xi) \omega + \xi \otimes d\omega ;$$

3. l'application  $\theta = \nabla^2 : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$  est un endomorphisme  $\Omega$ -linéaire de  $\tilde{\mathcal{E}}$  ;
4. la valeur de l'accouplement est donnée par l'égalité

$$\langle [\mathcal{E}], [\tau] \rangle = \frac{1}{m!} \int \theta^m$$

où

- $n$  est la dimension (paire) du cycle  $\Omega$  et  $n = 2m$  ;
- $[\mathcal{E}] \in K_0(\mathcal{A})$  est la classe de  $\mathcal{E}$  ;
- $\tau$  est le caractère de  $\Omega$  ;

- $\int$  est la trace du cycle ;
- $\theta$  est l'endomorphisme de  $\widetilde{\mathcal{E}}$  défini par  $\theta = \nabla^2$ .

**Remarque 1.70.** Dans la dernière égalité,  $\int$  représente en fait la trace induite sur l'algèbre graduée  $\text{End}_\Omega(\widetilde{\mathcal{E}})$  par l'application  $\int : \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 1.3.4 Produits croisés généralisés lisses

Dans cette sous-section, nous prouvons que si nous disposons d'une action d'un groupe de Lie de dimension finie sur un bimodule hilbertien, alors nous pouvons construire des versions lisses de  $A$ ,  $E$  et finalement  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . Nous montrons également que ces versions lisses entrent dans le cadre du chapitre 2 – dès que la croissance modérée (définition 2.26) est satisfaite.

Spécifions ce que nous appelons « action de bimodule hilbertien » :

**Définition 1.71** (action de bimodule hilbertien). Soit  ${}_A F_A$  un bimodule hilbertien sur une  $C^*$ -algèbre  $A$ . Une *action de bimodule hilbertien* est une paire  $(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des actions de  $G$  sur  $A$  et  $E$  respectivement, qui satisfont :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \beta_g(\xi a) = \beta_g(\xi) \alpha_g(a) & (ii) \quad & \langle \beta_g(\xi), \beta_g(\eta) \rangle_A = \alpha_g(\langle \xi, \eta \rangle_A) \\ (iii) \quad & \beta_g(\phi(a)\xi) = \phi(\alpha_g(a))\beta_g(\xi) & (iv) \quad & {}_A \langle \beta_g(\xi), \beta_g(\eta) \rangle = \alpha_g({}_A \langle \xi, \eta \rangle), \end{aligned} \quad (1.5)$$

quels que soient  $\xi, \eta \in E, a \in A$  et  $g \in G$ .

Cette définition se trouve essentiellement dans [41] (remarque 4.10 (2)).

**Remarque 1.72.** Si  $E$  est un bimodule hilbertien muni d'une action de bimodule hilbertien, la proposition 1.68 s'applique, et nous avons en outre une restriction de  ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ .

**Remarque 1.73.** Un bimodule hilbertien  ${}_A E_A$  étant donné, il n'est pas du tout évident qu'on puisse passer d'une action de *module hilbertien* (définition 1.67) à une action de *bimodule hilbertien* au sens de la définition 1.71. Le passage de l'un à l'autre nécessite une compatibilité analytique entre actions de  $A$  à gauche et à droite. On peut même construire un contre-exemple avec  $A = C(S^1)$ ,  $E = C(S^1)$  et  $G = S^1$  – voir l'annexe A.4. Dans le contre-exemple proposé, le bimodule est pourtant un bimodule d'équivalence de Morita...

La construction du produit tensoriel intérieur est compatible avec les actions de bimodules hilbertiens :

**Proposition 1.74.** Soient  $E$  et  $F$  deux bimodules hilbertiens sur  $A$  sur lesquels  $G$  agit par  $(\alpha, \beta)$  et  $(\alpha, \beta')$  avec la même action  $\alpha$  sur  $A$ . Si  $(\xi_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(\eta_{i'})_{i' \in \{1, \dots, m\}}$  sont des repères  $G$ -lisses de  $E$  et  $F$ , alors :

- le produit tensoriel intérieur  $E \otimes_A F$  est muni de l'action de bimodule hilbertien  $(\alpha, \beta \otimes \beta')$  ;
- $(\xi_i \otimes \eta_{i'})_{i, i'}$  forme un repère  $G$ -lisse de  $E \otimes_A F$ .

*Démonstration.* Nous avons démontré plus haut (voir le lemme 1.47) que le produit tensoriel intérieur de deux bimodules hilbertiens est un bimodule hilbertien. Il nous suffit donc de prouver que  $(\alpha, \beta \otimes \beta')$  définit une action de bimodule hilbertien. Il est facile de vérifier les points (i) et (iii) de (1.5) pour  $\beta \otimes \beta'$ , en utilisant les propriétés analogues de  $\beta$  et  $\beta'$ .

Le point (ii) s'écrit, en notant  $\alpha, \beta$  et  $\beta'$  pour  $\alpha_g, \beta_g$  et  $\beta'_g$  :

$$\begin{aligned} \langle \beta(\xi) \otimes \beta'(\eta), \beta(\xi') \otimes \beta'(\eta') \rangle_A &= \langle \beta'(\eta), \langle \beta(\xi), \beta(\xi') \rangle_A \cdot \beta'(\eta') \rangle_A = \\ &= \langle \beta'(\eta), \alpha(\langle \xi, \xi' \rangle_A) \cdot \beta'(\eta') \rangle_A = \langle \beta'(\eta), \beta'(\langle \xi, \xi' \rangle_A \cdot \eta') \rangle_A = \alpha(\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle_A). \end{aligned}$$

Le point (iv) se prouve de façon similaire.

Nous avons déjà prouvé (voir le lemme 1.30) que si  $(\xi_\iota)$  et  $(\eta_{\iota'})$  sont des repères de  $E$  et  $F$ , alors  $(\xi_\iota \otimes \eta_{\iota'})_{\iota, \iota'}$  est un repère de  $E \otimes_A F$ . Il nous suffit donc de prouver que les  $\xi_\iota \otimes \eta_{\iota'}$  sont  $G$ -lisses. Le produit tensoriel de deux fonctions dérivables est dérivable, ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 1.75.** Vu la définition 1.50 d'un produit croisé généralisé, une action  $(\alpha, \beta)$  d'un groupe de Lie  $G$  sur un bimodule hilbertien  $E$  induit toujours une action  $\underline{\beta}$  de  $G$  sur  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . Par construction,  $\underline{\beta}$  préserve les degrés dans  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . En conséquence, on peut toujours étendre  $\underline{\beta}$  en une action  $\tilde{\beta} : \tilde{G} = G \times S^1 \curvearrowright A \rtimes_E \mathbb{Z}$ , définie par  $\tilde{\beta}(g, t) = \underline{\beta}_g \circ \gamma_t$ , où  $\gamma$  est l'action de jauge sur  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ .

La définition suivante est alors naturelle :

**Définition 1.76.** Si  $E$  est un bimodule hilbertien équipé d'une action  $(\alpha, \beta)$  continue point par point d'un groupe de Lie  $G$ , on appelle *produit croisé généralisé lisse* associé à  $G$  et on note  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{G}} \mathbb{Z}$  l'algèbre des éléments  $\tilde{G}$ -lisses de  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ .

Pour munir  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{G}} \mathbb{Z}$  d'une structure d'algèbre localement convexe, nous aurons besoin des notations suivantes :

**Notation 1.77.** Dans la suite, nous fixons un groupe de Lie  $G$  de dimension finie  $N$  et nous notons  $(\partial_k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$  une base de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  associée à  $G$ . Rappelons que les  $\partial_k$  agissent par dérivation sur les éléments  $G$ -lisses de  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ .

**Notation 1.78.** Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre et  $\partial$  une dérivation sur  $B$ . Si  $T \in B$  est dans le domaine de définition de  $\partial$ , on note  $\rho_{\partial}(T)$  l'élément de  $M_2(B)$  défini par

$$\rho_{\partial}(T) = \begin{pmatrix} T & \partial T \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que  $\rho_{\partial}$  est un homomorphisme d'algèbre. Toutefois,  $\rho_{\partial}$  n'est pas compatible avec l'involution de  $B$ .  $\rho_{\partial}$  n'est donc pas un  $*$ -homomorphisme.

Pour appliquer cette construction à notre cas, notons que l'action  $\alpha: G \curvearrowright A$  s'étend en une action  $\alpha \otimes \text{Id}: G \curvearrowright M_n(\mathbb{C}) \otimes A \simeq M_n(A)$ . Pour simplifier les notations, dans la suite nous noterons  $\alpha$  à la place de  $\alpha \otimes \text{Id}$ . Nous pouvons alors donner un sens à l'action de  $\partial_k$  sur  $M_n(A)$ . Nous noterons  $\rho_k$  au lieu de  $\rho_{\partial_k}$  les morphismes des  $M_n(A)$  induits grâce à l'action  $\alpha$ . Enfin, pour  $l \geq 0$  nous écrirons  $\rho_k^{(l)}(T)$  pour signifier la composée  $\rho_k^{(l)}(T) = \underbrace{\rho_k \circ \rho_k \circ \dots \circ \rho_k}_{k \text{ fois}}(T)$ . Par convention,  $\rho_k^{(0)}(T) = T$ .

**Proposition 1.79.** *Sous les conditions de la définition 1.76, l'algèbre  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est*

- (i) *une sous-algèbre lisse de  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ ,*
- (ii) *stable par passage à l'adjoint,*
- (iii) *localement convexe et complète pour les normes ( $i \in \mathbb{N}$ )*

$$\|Fa\|_i = \sup_{i_1+i_2+\dots+i_N \leq i} \left\| \rho_1^{(i_1)} \circ \rho_2^{(i_2)} \circ \dots \circ \rho_N^{(i_N)}(F) \right\|,$$

- (iv) *générée comme algèbre localement convexe par les éléments de la forme  $S_{\xi}$ ,  $a$  et  $S_{\xi}^*$  de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$*
- (v) *et ses éléments sont jauges-réguliers (au sens de  $S^1 \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ ).*

Notons que c'est l'extension de  $G$  à  $\tilde{G}$  qui permet de satisfaire le point (v). Cette dernière condition revient à demander qu'il y ait une décroissance rapide « suivant le degré » dans  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* L'action  $\tilde{\beta}$  de  $\tilde{G}$  sur la  $C^*$ -algèbre  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  est un automorphisme de  $C^*$ -algèbre. En conséquence, il préserve la norme et la remarque 1.19 montre qu'il suffit de prouver la continuité sur une partie dense. Par définition, l'algèbre (algébrique) engendrée par les  $S_{\xi}$ ,  $a$  et  $S_{\xi}^*$  est une partie dense de  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . Il est clair que  $\tilde{\beta}$  est continue point par point sur cette algèbre, donc  $\tilde{\beta}$  est continue point par point sur  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . Ceci nous permet d'utiliser la proposition 1.57 pour montrer le point (i).

Par construction de  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\beta}(F)^* = \tilde{\beta}(F^*)$  et donc si  $F$  est  $\tilde{G}$ -lisse, alors  $F^*$  l'est également, ce qui permet de prouver le point (ii).

L'expression proposée pour  $\|\cdot\|_i$  permet de contrôler toutes les dérivées jusqu'au degré  $i$  et  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est bien complète comme algèbre localement convexe pour ces normes.

Si  $\partial$  est un élément quelconque de l'algèbre de Lie  $\tilde{\mathcal{G}}$  de  $\tilde{G}$ , nous pouvons utiliser la commutation de l'action de  $G$  avec l'action de jauge et la commutativité de  $S^1$  pour prouver que pour tout élément  $\tilde{G}$ -régulier  $F$ ,

$$\rho_{\partial}(\gamma_t(F)) = \gamma_t(\rho_{\partial}(F)).$$

Ce résultat s'étend aux  $\rho_k^{(l)}$ . Comme par définition de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ , quelle que soit la suite finie  $\partial_1, \dots, \partial_n$  dans  $\tilde{\mathcal{G}}$ ,  $t \mapsto \gamma_t(\partial_1 \dots \partial_n(F))$  est continue (et même dérivable) comme fonction  $S^1 \rightarrow A \rtimes_E \mathbb{Z}$ , nous en déduisons que l'action de jauge sur  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est continue point par



point (comme fonction  $S^1 \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ ). En particulier, tous les éléments de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  sont jauge-réguliers, ce qui prouve le point (v) et permet d'appliquer la proposition 1.21.

Les éléments homogènes de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  sont en particulier des éléments homogènes de  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ . La proposition 1.74 nous permet de construire des repères lisses pour les  $\mathcal{E}^{\otimes p}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , à partir d'un repère lisse pour  $\mathcal{E}$ . Pour traiter le cas des éléments de homogènes de degré négatif, il suffit de passer à l'adjoint – ce qui permet de passer d'un degré à son opposé. Nous avons alors des repères pour tous les  $\mathcal{E}^{\otimes p}$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ , et ces repères s'expriment comme produits de  $S_{\xi}$  ou de  $S_{\xi}^*$ , avec  $\xi \in \mathcal{E}$ . Nous en déduisons que  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est bien engendrée comme algèbre localement convexe par les  $S_{\xi, a}$  et  $S_{\xi}^*$  qui sont dans  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ .  $\square$

## Chapitre 2

# Résultats généraux : hexagone exact

Dans le présent chapitre, nous allons établir le résultat suivant :

**Théorème.** *Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse à croissance modérée, alors quel que soit le foncteur  $H$  semi-exact,  $\mathcal{K}$ -stable et invariant sous difféotopie, l'hexagone suivant est exact :*

$$\begin{array}{ccccc} H(\mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ H(\mathcal{S}(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})) & \longleftarrow & H(\mathcal{S}\mathcal{A}) & \longleftarrow & H(\mathcal{S}\mathcal{A}), \end{array}$$

où  $\mathcal{S}$  est la suspension lisse.

Pour établir ce résultat, nous suivrons de près la démarche de la section 14 de [24] et (plus vaguement) celle de la section 4 de [41]. Dans un premier temps, nous chercherons à donner un sens à l'énoncé ci-dessus. Nous commencerons donc par présenter notre cadre général dans la section 2.1. Ce dernier est essentiellement issu des travaux de CUNTZ. Nos références seront principalement [24] et [23].

La section 2.2 sera consacrée à l'établissement à proprement parler du théorème. Pour l'agrément du lecteur, les conditions que nous utiliserons pour prouver le théorème sont rassemblés dans la sous-section 2.2.1. Suivant toujours les étapes de CUNTZ, nous commencerons par définir une *algèbre de Toeplitz*  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  associée à notre produit croisé généralisé lisse  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  (sous-section 2.2.2). Notre définition 2.28 de cette algèbre est justifiée par la construction de l'annexe A.3, qui en est l'analogue dans le cadre des  $C^*$ -algèbres. Munis de cette algèbre, nous établirons l'extension linéairement scindée (2.2)

$$0 \rightarrow \ker \bar{\pi} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Il ne nous restera alors plus que deux étapes :

1. identifier le noyau  $\ker \bar{\pi}$  avec une certaine algèbre  $\mathcal{C}$  et montrer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  sont équivalents pour  $H$  (sous-section 2.2.3),
2. prouver que  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  et  $\mathcal{A}$  sont « équivalents » pour le foncteur  $H$  – pourvu que celui-ci ait les bonnes conditions – (sous-section 2.2.4), en d’autres termes :

$$H(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) \simeq H(\mathcal{A}),$$

avant d’obtenir le résultat attendu (sous-section 2.2.5).

## 2.1 Cadre général

### 2.1.1 Préliminaires

**Définition 2.1** (cylindre sur  $\mathcal{A}$ ). Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre localement convexe. Nous noterons  $Z\mathcal{A}$  et appellerons *cylindre sur  $\mathcal{A}$*  l’algèbre localement convexe des fonctions lisses  $C^\infty([0, 1], \mathcal{A})$  dont toutes les *dérivées* successives s’annulent aux extrémités 0 et 1.

**Définition 2.2.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre localement convexe. La *suspension lisse* de  $\mathcal{A}$  est l’algèbre

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \left\{ f \in C^\infty([0, 1], \mathcal{A}) \mid \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

Notons que les deux définitions ci-dessus sont différentes :  $\mathcal{S}\mathcal{A} \subseteq Z\mathcal{A}$  mais pour la suspension lisse nous demandons en plus que  $f(0) = f(1) = 0$ .

Dans la suite, nous noterons  $\text{ev}_t^{\mathcal{A}} : Z\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  les évaluations aux points  $t \in [0, 1]$ .

**Définition 2.3** (difféotopie). Soient  $\phi_0$  et  $\phi_1$  des homomorphismes d’algèbres localement convexes  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Une *difféotopie* entre  $\phi_0$  et  $\phi_1$  est un homomorphisme  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow Z\mathcal{B}$  tel que  $\text{ev}_i^{\mathcal{B}} \circ \Phi = \phi_i$  pour  $i = 0, 1$ .

**Définition 2.4** (opérateurs compacts lisses). Les *opérateurs compacts lisses* ou plus simplement les *compacts lisses* sont les matrices  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  à valeurs complexes  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  dont les entrées décroissent rapidement. L’ensemble des compacts lisses est noté  $\mathcal{K}$ . La topologie sur  $\mathcal{K}$  est donnée pour  $n \in \mathbb{N}$  par les normes :

$$p_n((a_{i,j})) = \sum_{i,j} |1 + i|^n |1 + j|^n |a_{i,j}|.$$

**Définition 2.5** (suite exacte courte linéairement scindée). Une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

sera dite *linéairement scindée* si la flèche  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  admet un relèvement (linéaire) *continu*. Dans la suite, nous utiliserons le terme de *suite exacte scindée* pour signifier suite *linéairement* scindée – sauf mention expresse du contraire.

**Définition 2.6.** Un foncteur  $H$  sur la catégorie des algèbres localement convexes à valeurs dans les groupes abéliens est appelé :

- $\mathcal{K}$ -stable si l'inclusion naturelle  $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ,  $a \mapsto e \otimes a$  obtenue grâce à un idempotent minimal  $e \in \mathcal{K}$  induit un isomorphisme

$$H(\theta): H(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} H(\mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{A});$$

- *invariant sous difféotopie* ou *difféotopie-invariant* si  $H(\text{ev}_0^{\mathcal{A}}) = H(\text{ev}_1^{\mathcal{A}})$ , quelle que soit l'algèbre localement convexe  $\mathcal{A}$  ;
- *split exact* si pour toute suite exacte courte scindée d'algèbres localement convexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

dont le relèvement est un homomorphisme d'algèbres, la suite

$$0 \longrightarrow H(\mathcal{A}) \longrightarrow H(\mathcal{B}) \longrightarrow H(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

est exacte.

**Remarque 2.7.** Il est facile de déduire de cette définition que pour deux algèbres localement convexes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  quelconques, il y a un isomorphisme de groupes abéliens  $H(\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}) \simeq H(\mathcal{A}) \oplus H(\mathcal{C})$ .

En particulier, si  $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$  peut s'écrire  $\varphi = \varphi_{\mathcal{A}} \oplus \varphi_{\mathcal{C}}$ , où  $\varphi_{\mathcal{A}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $\varphi_{\mathcal{C}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , alors  $H(\varphi) = H(\varphi_{\mathcal{A}}) + H(\varphi_{\mathcal{C}})$ , avec un léger abus de notation.

### 2.1.2 Contextes de Morita

Les *contextes de Morita* sont définis dans [24], section 7. Nous ajoutons quelques isomorphismes à la définition originale pour rendre la notion plus maniable :

**Définition 2.8** (contexte de Morita). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux algèbres localement convexes. Un *contexte de Morita* de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  est un quintuplet  $(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i, \eta_j)$  où  $\mathcal{C}$  est une algèbre localement convexe,  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  sont des isomorphismes sur des sous-algèbres de  $\mathcal{C}$  et les  $(\xi_i)$  et  $(\eta_j)$  sont deux suites de  $\mathcal{C}$  qui vérifient :

- (i)  $\eta_j \phi(\mathcal{A}) \xi_i \subseteq \psi(\mathcal{B})$ , quels que soient  $i$  et  $j$  ;
- (ii) pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , la famille  $(\eta_j \phi(a) \xi_i)$  est rapidement décroissante – c'est-à-dire que  $(p_{\alpha}(\eta_j \phi(a) \xi_i))_{i,j}$  est rapidement décroissante, quelle que soit la semi-norme  $p_{\alpha}$  ;
- (iii)  $(\sum \xi_i \eta_i) \phi(a) = \phi(a)$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , au sens où les sommes partielles convergent dans  $\phi(\mathcal{A})$ .

**Définition 2.9.** Soit  $H$  un foncteur  $\mathcal{K}$ -stable. Si nous disposons d'un contexte de Morita  $(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i, \eta_j)$  entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , nous pouvons définir une application  $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  par

$$a \mapsto \psi^{-1}(\eta_i \phi(a) \xi_j).$$

Le contexte de Morita induit alors un élément de  $H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : H(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i, \eta_i) = H(\theta)$ .

Notons que pour  $a, a' \in \mathcal{A}$  l'expression

$$\left(\psi^{-1}(\eta_i \phi(a) \xi_j)\right)_{ij} \left(\psi^{-1}(\eta_k \phi(a') \xi_l)\right)_{kl} = \left(\psi^{-1}\left(\eta_i \phi(a) \sum_m \xi_m \eta_m \phi(a') \xi_j\right)\right)_{ij}$$

est égale à  $\theta(aa')$  à cause du point (iii) de la définition d'un contexte de Morita. Ceci prouve que  $\theta$  est un homomorphisme.

La définition et la proposition suivantes proviennent du lemme 7.2 de [24] :

**Définition 2.10** (bicontexte de Morita). Un *bicontexte de Morita* est une paire de contextes de Morita  $(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i^{\mathcal{A}}, \eta_j^{\mathcal{A}})$  et  $(\psi, \mathcal{C}, \phi, \xi_i^{\mathcal{B}}, \eta_j^{\mathcal{B}})$  de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  et de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{A}$  respectivement, qui vérifie :

- (i)  $\phi(\mathcal{A}) \xi_i^{\mathcal{A}} \xi_j^{\mathcal{B}} \subseteq \phi(\mathcal{A})$ ,  $\eta_i^{\mathcal{B}} \eta_j^{\mathcal{A}} \phi(\mathcal{A}) \subseteq \phi(\mathcal{A})$ , quels que soient  $i, j$  ;
- (ii)  $\psi(\mathcal{B}) \xi_i^{\mathcal{B}} \xi_j^{\mathcal{A}} \subseteq \psi(\mathcal{B})$ ,  $\eta_i^{\mathcal{A}} \eta_j^{\mathcal{B}} \psi(\mathcal{B}) \subseteq \psi(\mathcal{B})$ , quels que soient  $i, j$ .

Les conditions (i) et (ii) sont appelées *compatibilités à gauche* et *à droite*, respectivement.

La proposition ci-dessous est énoncée pour le foncteur  $kk^{\text{alg}}$  dans le lemme 7.2 de [24]. Cependant, la démonstration ne fait en fait intervenir que la  $\mathcal{K}$ -stabilité et l'invariance sous difféotopie.

**Proposition 2.11.** *Si  $H$  est un foncteur  $\mathcal{K}$ -stable et invariant sous difféotopie et que  $(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i^{\mathcal{A}}, \eta_j^{\mathcal{A}})$  et  $(\psi, \mathcal{C}, \phi, \xi_i^{\mathcal{B}}, \eta_j^{\mathcal{B}})$  sont deux contextes de Morita, alors :*

- $H(\psi, \mathcal{C}, \phi, \xi_i^{\mathcal{B}}, \eta_j^{\mathcal{B}}) \circ H(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i^{\mathcal{A}}, \eta_j^{\mathcal{A}}) = \text{Id}_{H(\mathcal{A})}$  si les contextes sont compatibles à gauche ;
- $H(\phi, \mathcal{C}, \psi, \xi_i^{\mathcal{A}}, \eta_j^{\mathcal{A}}) \circ H(\psi, \mathcal{C}, \phi, \xi_i^{\mathcal{B}}, \eta_j^{\mathcal{B}}) = \text{Id}_{H(\mathcal{B})}$  si les contextes sont compatibles à droite.

### 2.1.3 Quasi-homomorphismes

Nos références concernant la notion de quasi-homomorphisme sont [20], [27] et [24]. Nous reprenons la définition de la section 6 de ce dernier article :

**Définition 2.12** (quasi-homomorphisme). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux algèbres localement convexes. Un *quasi-homomorphisme* de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  par rapport à  $\hat{\mathcal{B}}$  est une paire  $(\alpha, \bar{\alpha})$  d'homomorphismes d'algèbres localement convexes  $\mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$  tels que

- $\mathcal{B}$  est une sous-algèbre fermée de  $\hat{\mathcal{B}}$  ;
- $\alpha(a) - \bar{\alpha}(a) \in \mathcal{B}$ , pour tout  $a \in \mathcal{A}$  ;
- $\alpha(a)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}\alpha(a) \subseteq \mathcal{B}$ , pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .

Nous utiliserons la notation  $(\alpha, \bar{\alpha}) : \mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{B}$ .

Dans cette définition,  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  jouent des rôles symétriques. Par la suite, nous abrégons « quasi-homomorphisme » en *q-morphisme*. Les q-morphismes ont été utilisés pour étudier la  $K$ -théorie depuis l'article [21].

Rassemblons maintenant les résultats des travaux de CUNTZ concernant les q-morphismes qui nous seront utiles :

**Proposition 2.13.** *Si  $(\alpha, \bar{\alpha}): \mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{B}$  est un  $q$ -morphisme et  $H$  est un foncteur split exact à valeurs dans la catégorie des groupes abélien, alors*

- (i)  $(\alpha, \bar{\alpha})$  induit un morphisme de  $H(\mathcal{A})$  vers  $H(\mathcal{B})$  noté  $H(\alpha, \bar{\alpha})$  ;
- (ii) quel que soit le morphisme  $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $(\alpha \circ \phi, \bar{\alpha} \circ \phi)$  est un  $q$ -morphisme et :

$$H(\alpha, \bar{\alpha}) \circ H(\phi) = H(\alpha \circ \phi, \bar{\alpha} \circ \phi) ;$$

- (iii) si  $\phi: \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  est un morphisme et  $\mathcal{C} \trianglelefteq \hat{\mathcal{C}}$  est une sous-algèbre qui contient l'adhérence de  $\phi(\mathcal{B})$ , alors  $(\phi \circ \alpha, \phi \circ \bar{\alpha}): \mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{C}} \supseteq \mathcal{C}$  est un  $q$ -morphisme et  $H(\phi \circ \alpha, \phi \circ \bar{\alpha}) = H(\phi) \circ H(\alpha, \bar{\alpha})$  ;
- (iv) si  $\mathcal{A}$  est générée comme algèbre localement convexe par l'ensemble  $X$ , que  $\mathcal{B} \trianglelefteq \hat{\mathcal{B}}$  est un idéal (fermé) et que  $\alpha, \bar{\alpha}: \mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$  sont deux morphismes tels que  $(\alpha - \bar{\alpha})(X) \subseteq \mathcal{B}$  alors  $(\alpha, \bar{\alpha})$  est un  $q$ -morphisme  $\mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{B}$  ;
- (v) si  $\alpha - \bar{\alpha}$  est orthogonal à  $\bar{\alpha}$ , c'est-à-dire que pour tous  $x, y \in \mathcal{A}$ ,

$$(\alpha - \bar{\alpha})(x)\bar{\alpha}(y) = \bar{\alpha}(y)(\alpha - \bar{\alpha})(x) = 0,$$

alors  $\alpha - \bar{\alpha}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme et  $H(\alpha, \bar{\alpha}) = H(\alpha - \bar{\alpha})$  ;

- (vi) si  $H$  est invariant sous difféotopie et que  $(\alpha, \bar{\alpha}): \mathcal{A} \rightrightarrows Z\hat{\mathcal{B}} \supseteq Z\mathcal{B}$  est un  $q$ -morphisme, alors  $H(ev_0 \circ \alpha, ev_0 \circ \bar{\alpha}) = H(ev_1 \circ \alpha, ev_1 \circ \bar{\alpha})$ .

*Démonstration.* Pour l'agrément du lecteur, nous présentons également des preuves. Les démonstrations originales se trouvent dans divers articles de CUNTZ. Nos références ici sont les sections 1 et 2 de [22] et la section 6 de [24].

- (i) Étant donné  $(\alpha, \bar{\alpha}): \mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{B}$ , nous pouvons considérer l'espace localement convexe  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \oplus \hat{\mathcal{B}}$  engendré par les  $(x, \bar{\alpha}(x))$  et les  $(0, b)$  pour  $x \in \mathcal{A}$  et  $b \in \mathcal{B}$ . Il est facile de vérifier en utilisant les conditions de la définition 2.12 que  $\mathcal{C}$  est en fait une algèbre pour le produit  $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$ . Il existe des applications  $j: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  données par  $j(b) = (0, b)$  et  $\pi(x, y) = x$  telles que

$$0 \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte d'algèbres localement convexes. L'application  $\pi$  admet deux relèvements  $\alpha', \bar{\alpha}': \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  donnés par  $\alpha'(x) = (x, \alpha(x))$  et  $\bar{\alpha}'(x) = (x, \bar{\alpha}(x))$  qui sont des *homomorphismes d'algèbres*. Comme  $H$  est split exact, la suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow H(\mathcal{B}) \xrightarrow{H(j)} H(\mathcal{C}) \xrightarrow{H(\pi)} H(\mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Comme  $\pi \circ \alpha' = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ ,  $H(\pi) \circ H(\alpha') = \text{Id}_{H(\mathcal{A})}$ . De même,  $H(\pi) \circ H(\bar{\alpha}') = \text{Id}_{H(\mathcal{A})}$ , d'où  $H(\pi) \circ (H(\alpha') - H(\bar{\alpha}')) = 0$ . La suite exacte de groupes abéliens montre alors que  $H(\alpha') - H(\bar{\alpha}')$  prend ses valeurs dans  $\ker H(\pi) = H(\mathcal{B})$ . En d'autres termes, il existe un unique  $H(\alpha, \bar{\alpha}): H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{B})$  tel que  $H(j) \circ H(\alpha, \bar{\alpha}) = H(\alpha' - \bar{\alpha}')$ .

- (ii) Il est facile de vérifier que sous les conditions proposées,  $(\phi \circ \alpha, \phi \circ \bar{\alpha})$  définit bien un q-morphisme. La démonstration de l'égalité de morphismes de groupes abéliens s'obtient rapidement en utilisant la définition de  $H(\alpha, \bar{\alpha})$  ci-dessus, pourvu que l'on distingue bien  $\mathcal{B}$  et sa copie dans  $\mathcal{C}$ .
- (iii) Là encore, il est facile de vérifier que  $(\phi \circ \alpha, \phi \circ \bar{\alpha}) : \mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{C}} \supseteq \mathcal{C}$  est un q-morphisme. L'égalité de morphismes s'obtient d'un diagramme commutatif, par une suite simple de calculs formels.
- (iv) Prenons  $x$  et  $x'$  dans la partie génératrice  $X$  de  $\mathcal{A}$ . Nous avons :

$$\alpha(xx') - \bar{\alpha}(xx') = (\alpha(x) - \bar{\alpha}(x'))\alpha(x') + \bar{\alpha}(x')(\alpha(x') - \bar{\alpha}(x')),$$

qui permet de prouver que  $(\alpha - \bar{\alpha})(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}$  étant un idéal, il est clair que  $\alpha(a)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}\alpha(a) \subseteq \mathcal{B}$ . Nous avons donc un q-morphisme.

- (v) Sous ces hypothèses,  $\alpha(x)\bar{\alpha}(y) = \bar{\alpha}(x)\bar{\alpha}(y)$  et donc

$$(\alpha - \bar{\alpha})(x)(\alpha - \bar{\alpha})(y) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(x)\bar{\alpha}(y) = \alpha(xy) - \bar{\alpha}(xy),$$

qui prouve que  $\alpha - \bar{\alpha}$  est un morphisme. Sous ces conditions,  $\bar{\alpha}'(\mathcal{A})$  est un idéal dans  $\mathcal{C}$ . Il y a donc un isomorphisme d'algèbres  $j(\mathcal{B}) \oplus \bar{\alpha}'(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{C}$  qui est donné par  $\iota : b \oplus x \mapsto (x, \bar{\alpha}(x) + b)$ . Il s'agit bien d'un morphisme d'algèbres car

$$\iota(bb' \oplus xx') = (xx', \bar{\alpha}(xx') + bb') = (x, \bar{\alpha}(x) + b)(x', \bar{\alpha}(x') + b') = \iota(b \oplus x)\iota(b' \oplus x'),$$

en utilisant la condition d'orthogonalité.

On peut noter  $\beta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  le morphisme  $\beta(x) = \alpha(x) - \bar{\alpha}(x)$ . Il est facile de voir que  $j \circ \beta = \alpha' - \bar{\alpha}'$ , soit encore  $j \circ \beta + \bar{\alpha}' = \alpha'$ . La remarque 2.7 appliquée à la somme directe  $j(\mathcal{B}) \oplus \bar{\alpha}'(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{C}$  montre alors que  $H(j) \circ H(\beta) + H(\bar{\alpha}') = H(\alpha')$  ou encore  $H(j) \circ H(\beta) = H(\alpha') - H(\bar{\alpha}')$ , qui prouve l'égalité  $H(\beta) = H(\alpha, \bar{\alpha})$  annoncée.

- (vi) Il s'agit d'une conséquence directe de l'invariance sous difféotopie et du point (iii).

□

Deux sous-ensembles  $X$  et  $Y$  d'une algèbre localement convexe  $\mathcal{B}$  étant donnés, nous dirons que  $Y$  est  $X$ -stable si  $XY$  et  $YX$  sont inclus dans  $Y$ .

**Définition 2.14.** Soient  $X, Y \subseteq \mathcal{B}$  deux sous-ensembles. Nous définissons  $XYX$  comme la plus petite sous-algèbre  $X$ -stable et fermée de  $\mathcal{B}$  qui contient  $Y$ .

L'algèbre  $XYX$  est clairement indépendante de la *taille* (mais pas de la *topologie*) de l'algèbre  $\mathcal{B}$  : si  $\mathcal{B}$  est une sous-algèbre fermée de  $\mathcal{B}'$  et  $X, Y \subseteq \mathcal{B}$  alors l'intersection des sous-algèbres  $X$ -stables de  $\mathcal{B}'$  est égale à l'intersection des sous-algèbres  $X$ -stables de  $\mathcal{B}$ .

Dans la suite, nous noterons  $X^+$  l'ensemble  $X$  auquel on ajoute une unité.

**Remarque 2.15.**  $XYX$  est l'algèbre localement convexe générée par

$$\left\{ \sum_{finie} x_i y_i x'_i \middle| x_i, x'_i \in X^+, y_i \in Y \right\}.$$

Elle ne dépend donc que des algèbres localement convexes fermées  $\mathcal{LC}(X)$  et  $\mathcal{LC}(Y)$  générées dans  $\mathcal{B}$  par  $Y$  et  $X$ , respectivement :

$$XYX = X \mathcal{LC}(Y)X = \mathcal{LC}(X)Y \mathcal{LC}(X).$$

**Définition 2.16.** Étant donnée une paire de morphismes  $\alpha, \bar{\alpha}: \mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ , le q-morphisme  $(\alpha, \bar{\alpha}): \mathcal{A} \rightrightarrows \hat{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{B}$  où  $\mathcal{B} = \alpha(\mathcal{A})(\alpha - \bar{\alpha})(\mathcal{A})\alpha(\mathcal{A})$  est le *quasi-homomorphisme associée* à  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$ . Un q-homomorphisme est appelé *minimal* s'il est associé à une paire de morphismes  $\alpha, \bar{\alpha}$ .

Notons que si  $X$  génère  $\mathcal{A}$ , alors en utilisant les notations de la remarque 2.15  $\alpha(X)(\alpha - \bar{\alpha})(X)\alpha(X) = \alpha(\mathcal{A})(\alpha - \bar{\alpha})(\mathcal{A})\alpha(\mathcal{A})$ .

#### 2.1.4 Algèbre de Toeplitz lisse

Nous rappelons la définition et les propriétés de l'algèbre de Toeplitz lisse, telle qu'elle est définie dans [23] (voir le Satz 6.1) :

**Définition 2.17** (algèbres de Toeplitz lisses). L'*algèbre de Toeplitz lisse*  $\mathcal{T}$  est définie topologiquement comme la somme directe  $\mathcal{T} = \mathcal{K} \oplus C^\infty(S^1)$ , où  $C^\infty(S^1)$  est équipée de sa structure d'algèbre de Fréchet habituelle. La multiplication sur  $\mathcal{T}$  est définie à travers l'action de  $\mathcal{T}$  sur les suites rapidement décroissantes  $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ .  $\mathcal{K}$  agit de façon naturelle et  $C^\infty(S^1)$  par convolution tronquée. Explicitement, en écrivant  $U$  pour  $z \mapsto z$  et  $\bar{U}$  pour  $z \mapsto z^{-1}$ , la fonction  $a = \sum a_k U^k$  – où  $U^{-l} = \bar{U}^l$  pour  $l$  positif – agit sur  $(\xi_i) \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$  par :

$$(a\xi)_i = \sum_{k+j=i} a_k \xi_j.$$

Avec cette action, les fonctions  $U$  et  $\bar{U}$  agissent comme les *shifts* à droite et à gauche respectivement. Nous notons  $S$  et  $\bar{S}$  respectivement les images de  $U$  et  $\bar{U}$  dans  $\mathcal{T}$ . Il est alors clair que  $\bar{S}S = 1$ . Si on note  $e = 1 - S\bar{S}$ , il apparaît que l'injection  $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{T}$  s'implémente explicitement par  $(a_{i,j}) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} S^i e \bar{S}^j$  et que  $S$  et  $\bar{S}$  sont des générateurs de  $\mathcal{T}$ .

Nous extrayons de la preuve du lemme 6.2 de [23] la propriété suivante :

**Lemme 2.18.** *Il existe une difféotopie  $\phi_t: \mathcal{T} \rightarrow Z(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$  qui préserve l'unité, définie par :*

$$\phi_t(S) = S(1 - e) \otimes 1 + f(t)(e \otimes S) + g(t)Se \otimes 1,$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions lisses telles que d'une part  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $g(0) = 1$  et  $g(1) = 0$  et d'autre part toutes les dérivées de  $f$  et  $g$  s'annulent aux extrémités 0 et 1.



Dans le lemme ci-dessus, le morphisme  $\phi_0: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T}$  donné par  $x \mapsto x \otimes 1$  est l'inclusion canonique sur la première variable et  $\phi_1$  est le morphisme défini par  $S \mapsto \phi(S^2 \bar{S}) + (1 - S\bar{S}) \otimes S$ .

Dans la suite, pour alléger les notations, nous écrirons  $\hat{x}$  pour  $x \otimes 1$  et  $\check{x}$  pour  $e \otimes x$ , quel que soit  $x \in \mathcal{T}$ . Ceci donne en particulier un sens à  $\hat{S}$  et  $\check{S}$ .

Par construction, il existe une extension linéairement scindée :

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C^\infty(S^1) \rightarrow 0,$$

où  $\pi(S) = U$ . Nous noterons  $r$  le relèvement naturel de  $\pi$ . Cette application  $r$  envoie  $U \in C^\infty(S^1)$  sur  $S \in \mathcal{T}$ .

### 2.1.5 Foncteurs semi-exacts et hexagones

Dans cette sous-section, nous expliquons comment obtenir un hexagone exact à partir d'un foncteur semi-exact, invariant sous difféotopie et  $\mathcal{K}$ -stable.

**Définition 2.19.** Un foncteur  $H$  sur la catégorie des algèbres localement convexes à valeurs dans les groupes abéliens est appelé *semi-exact* si quelle que soit la suite exacte courte (linéairement) scindée :

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

la suite

$$H(\mathcal{A}) \longrightarrow H(\mathcal{B}) \longrightarrow H(\mathcal{C})$$

obtenue en appliquant  $H$  est exacte.

Il est facile de voir qu'un foncteur semi-exact est split exact.

**Lemme 2.20.** Si  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des algèbres localement convexes et que  $H$  est un foncteur semi-exact, invariant sous difféotopie et  $\mathcal{K}$ -stable, alors la suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

induit un hexagone exact :

$$\begin{array}{ccccc} H(\mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{B}) & \longrightarrow & H(\mathcal{C}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ H(\mathcal{S}\mathcal{C}) & \longleftarrow & H(\mathcal{S}\mathcal{B}) & \longleftarrow & H(\mathcal{S}\mathcal{A}) \end{array}$$

où  $\mathcal{S}\mathcal{A}$  est la suspension lisse de  $\mathcal{A}$  (définition 2.2).

*Démonstration.* C'est un résultat bien connu (voir par exemple [26], p.48). Nous commençons par étendre le foncteur semi-exact en une théorie homologique  $H_n$ , comme nous l'autorise le lemme 4.1.5 de [27]. Les  $H_n$  ainsi obtenus ont la périodicité de Bott – comme on peut le voir en utilisant la preuve de [24]–, d'où le résultat.  $\square$

## 2.2 Suite exacte à 6 termes

### 2.2.1 Hypothèses et définitions

Pour appliquer la construction qui suit, nous aurons besoin de *produits croisés généralisés lisses à croissance modérée*. Présentons les conditions requises :

**Définition 2.21** (produit croisé généralisé lisse). Un *produit croisé généralisé lisse*  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  associé au produit croisé généralisé  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  est

- (i) une sous-algèbre lisse de  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$
- (ii) *stable par passage à l'adjoint*,
- (iii) *localement convexe et complète*,
- (iv) générée comme algèbre localement convexe par les éléments de la forme  $S_{\xi}$ ,  $a$  et  $S_{\xi}^*$  de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ ,
- (v) et dont les éléments sont *jauges réguliers* (voir définition 1.55).

Les deux premières conditions sont des contraintes génériques : la première assure en particulier que  $K_*(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) = K_*(A \rtimes_E \mathbb{Z})$  et le point (ii) est naturel vu qu'il s'agit d'une version lisse d'une  $C^*$ -algèbre. La condition (iv) va nous permettre de faire des raisonnements par densité. En particulier, combinée avec la condition (v), elle nous permettra d'identifier l'image de la suite exacte (2.2) avec  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ .

Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{E}$  le module lisse provenant de la construction de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{E} = (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \cap E$ . La partie homogène de degré  $p \in \mathbb{Z}$  de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  sera notée  $\mathcal{E}^{(p)} = (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \cap (A \rtimes_E \mathbb{Z})^{(p)}$ . Pour distinguer les  $\xi \in \mathcal{E}$  des éléments de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  associés, nous écrirons  $S_{\xi}$  pour ces derniers. Enfin dans cette section, par cohérence avec les notations de la définition 2.17, l'adjoint de  $S_{\xi}$  sera noté  $\bar{S}_{\xi}$ .

La condition critique qui nous permettra de construire des contextes de Morita est la « croissance modérée ». Avant de pouvoir l'introduire, nous aurons besoin de la définition d'un produit croisé généralisé lisse *admissible* :

**Définition 2.22** (produit croisé généralisé lisse admissible). Un produit croisé généralisé lisse  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est dit *admissible* si pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , il existe une suite finie  $(\eta_i^p)_i$  d'éléments  $\eta_i^p \in \mathcal{E}^{(p)}$  telle que

$$\sum_i {}_A \langle \eta_i^p, \eta_i^p \rangle = 1. \quad (2.1)$$

**Remarque 2.23.** La condition (2.1) impose en particulier que le bimodule hilbertien  $E$  est *plein à gauche*. Par ailleurs, si la structure de produit croisé généralisé lisse provient d'une action de groupe de Lie – comme dans la définition 1.76 – on peut adapter la preuve de la proposition 1.68 pour montrer que cette condition est nécessaire et suffisante.

Finalement, pour définir les produits croisés généralisés à croissance modérée, nous aurons besoin de la notation :

**Notation 2.24.** Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse admissible, nous pouvons prendre les  $(\eta_i^p)$  de la définition 2.22 et les ordonner suivant l'ordre lexicographique de  $(i, p)$ . Nous noterons alors  $(\xi_l)_l$  les  $\eta_i^p$  numérotés selon cet ordre.

Par exemple, si nous disposons des suites  $\eta_1^0 = 1 \in \mathcal{A}$ ,  $(\eta_i^1)_{i \in \{1,2,3\}}$ ,  $(\eta_i^2)_{i \in \{1,2,3\}}$ ,  $\dots$ , la suite  $(\xi_l)$  s'écrira :

$$\xi_1 = 1 \in \mathcal{A} \quad \xi_2 = \eta_1^1 \quad \xi_3 = \eta_2^1 \quad \xi_4 = \eta_3^1 \quad \xi_5 = \eta_1^2 \quad \xi_6 = \eta_2^2 \quad \dots$$

Notons que de cette façon,  $(\xi_l)$  est une suite qui prend ses valeurs dans  $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(p)}$  et pas juste dans  $\mathcal{E}$ .

**Notation 2.25.** Pour simplifier les notations, nous étendons la définition de  $S_{\xi}$  de la façon suivante : si  $I \in \mathbb{N}^n$  est un multi-indice, nous notons  $\xi_I$  le  $n$ -uplet  $(\xi_{I_1}, \dots, \xi_{I_n})$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  et définissons  $S_{\xi_I} = S_{\xi_{I_1}} \cdots S_{\xi_{I_n}}$ . Nous étendons la définition de  $\bar{S}$  de la même manière. Nous appellerons  $\xi_I$  un *multivecteur* de  $\mathcal{E}$  et écrirons  $|\xi_I| = |I|$  pour la *dimension* du multi-indice  $I$ .

**Définition 2.26** (produit croisé généralisé à croissance modérée). Si un produit croisé généralisé lisse est admissible, il est dit à *croissance modérée* ou *modéré* si

- il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , la suite  $(\xi_i^q)_i$  contient au moins 1 et au plus  $N$  éléments ;
- quelle que soit la norme  $p$  sur  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  les suites (réelles) en  $l$   $(p(S_{\xi_l}))_l$  et  $(p(\bar{S}_{\xi_l}))_l$  sont majorées par un polynôme en  $l$ .

**Remarque 2.27.** Deux conséquences de la croissance modérée :

- quel que soit  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l/N \leq |\xi_l| \leq l$  ;
- quelle que soit la norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{T}$ , les suites réelles en  $l$   $(\|S^{|\xi_l|}\|)_l$ ,  $(\|\bar{S}^{|\xi_l|}\|)_l$  sont majorées par des polynômes en  $l$ .

### 2.2.2 Extension d'algèbres localement convexes

Nous partons d'une sous-algèbre lisse  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  au sens de la définition 2.21 d'un produit croisé généralisé  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$ .

**Définition 2.28** (algèbre de Toeplitz-Pimsner lisse). Un produit croisé généralisé lisse  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  étant donné, l'*algèbre de Toeplitz-Pimsner lisse*  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  associée est la sous-algèbre fermée de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$  engendrée par les  $a \otimes 1$ ,  $S_{\xi} \otimes S$  et  $\bar{S}_{\xi} \otimes \bar{S}$  pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $\xi \in \mathcal{E}$ .

Nous noterons  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\text{alg}}$  la sous-algèbre *algébrique* obtenue à partir des mêmes générateurs.

Lorsqu'il sera nécessaire de distinguer les deux sortes d'algèbres de Toeplitz, nous appellerons celles ci-dessus les *algèbres de Toeplitz-Pimsner*. La plupart du temps, nous appellerons simplement *algèbres de Toeplitz* aussi bien les algèbres de la définition 2.17 que celles de la définition 2.28.

**Proposition 2.29.** *Soit  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  un produit croisé généralisé lisse et  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  l'algèbre de Toeplitz associée. Il existe une suite exacte scindée :*

$$0 \rightarrow \ker \bar{\pi} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

*Démonstration.* Partons de la suite exacte scindée d'algèbres localement convexes :

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C^{\infty}(S^1) \rightarrow 0.$$

Par définition de  $\mathcal{T}$ , il existe un relèvement linéaire  $r$  de  $\pi$ . Nous pouvons tensoriser cette suite d'algèbres localement convexes par l'algèbre lisse  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ . Comme la suite exacte initiale est scindée, nous obtenons une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K} \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T} \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} C^{\infty}(S^1) \rightarrow 0.$$

Soit  $\bar{\pi}$  la restriction de  $\text{Id} \otimes \pi$  à  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}} \subseteq (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$ . Cette application est continue, en tant que produit tensoriel de deux fonctions continues – voir la proposition 1.10 – ce qui nous amène à l'extension :

$$0 \rightarrow \ker \bar{\pi} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightarrow \text{Im } \bar{\pi} \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte est scindée, car  $\text{Id} \otimes r : (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} C^{\infty}(S^1) \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$  se restreint à  $\text{Im } \bar{\pi}$  en un relèvement  $\bar{r}$  de  $\bar{\pi}$ .

Pour le voir, notons  $\Delta$  la sous-algèbre (fermée) de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \otimes C^{\infty}(S^1)$  engendrée par les  $a \otimes 1$ ,  $S_{\xi} \otimes U$  et  $\bar{S}_{\xi} \otimes \bar{U}$  pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $\xi \in \mathcal{E}$ . Il est clair que  $\bar{\pi}(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\text{alg}}) \subseteq \Delta$ . Comme  $\bar{\pi}$  est continu et  $\Delta$  fermée par construction, nous avons en fait  $\bar{\pi}(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \subseteq \Delta$ .

Pour l'autre sens, par construction, les sommes finies d'éléments homogènes sont denses dans  $\Delta$ . Grâce aux produits scalaires à gauche et à droite, tout produit fini de générateurs peut s'écrire sous la forme  $S_{\xi_1} \cdots S_{\xi_k} \otimes U^k$  si  $k > 0$  ou bien  $\bar{S}_{\xi_1} \cdots \bar{S}_{\xi_{-k}} \otimes \bar{U}^{-k}$  si  $k < 0$  ou bien  $a \otimes 1$  si  $k = 0$ .

Dans tous les cas, le relèvement  $\bar{r}$  envoie ce produit sur un élément de  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  – respectivement  $S_{\xi_1} \cdots S_{\xi_k} \otimes S^k$  si  $k > 0$  ou  $\bar{S}_{\xi_1} \cdots \bar{S}_{\xi_{-k}} \otimes \bar{S}^{-k}$  si  $k < 0$  ou bien  $a \otimes 1$  si  $k = 0$ . Comme d'une part  $\bar{r}$  est continu et  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  fermé, et d'autre part ces sommes finies sont denses dans  $\Delta$  (par définition), il apparaît que  $\bar{r}(\Delta) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ . Par conséquent,  $\Delta = \text{Im } \bar{\pi}$ , qui est en particulier fermé.

Prouvons maintenant que  $\text{Im } \bar{\pi}$  est isomorphe à  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ . Nous pouvons clairement définir un morphisme continu d'algèbres  $\text{Im } \bar{\pi} \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  par restriction de

$$\text{ev}_1 \otimes \text{Id} : (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} C^{\infty}(S^1) \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathbb{C} \simeq \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z},$$

où  $\text{ev}_1$  est l'évaluation au point  $1 \in S^1$ , donnée sur  $f \in C^{\infty}(S^1)$  par  $\text{ev}_1(f) = f(1)$ .

Comme les éléments  $F \in \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  sont *jauge lisses*,  $t \mapsto \gamma_t(F)$  définit une application continue  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z} \rightarrow C^{\infty}(S^1 \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})$ . Comme on peut identifier

$$C^{\infty}(S^1 \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \simeq (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} C^{\infty}(S^1)$$

(voir [26], p.62), cette relation définit une application continue

$$\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} C^\infty(S^1).$$

Il est facile de vérifier que ces deux fonctions continues sont réciproques l'une de l'autre sur les générateurs des deux algèbres. Par densité des générateurs, nous en déduisons que  $\text{Im } \bar{\pi}$  est isomorphe à  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ , en tant qu'algèbres localement convexes.  $\square$

**Remarque 2.30.** Il est crucial que l'on dispose d'un produit scalaire à gauche pour pouvoir prouver que  $\text{Id} \otimes r$  se restreint en un relèvement de  $\bar{\pi}$ , comme le montre l'exemple algébrique qui suit. Les difficultés autour de l'existence du relèvement peuvent être rapprochées de l'extension des scalaires donnée dans la section 2 de [41].

Considérons la version algébrique de l'algèbre de Cuntz  $\mathcal{O}_2$  de dimension 2. Le relèvement par  $\text{Id} \otimes r$  de  $S_1 \overline{S_1}$  est  $S_1 \overline{S_1} \otimes 1$ , qui n'est pas dans l'algèbre  $\mathcal{T}_2$  engendrée par les  $S_i \otimes S, a \otimes 1, \overline{S_i} \otimes \overline{S}$ .

Pour voir que  $S_1 \overline{S_1} \otimes 1$  n'est pas dans  $\mathcal{T}_2$ , notons que  $S_1 \overline{S_1} \otimes S \overline{S}$  est de degré 0. Comme  $\mathcal{T}_2$  est une algèbre de Toeplitz,  $S_1 \overline{S_1} \otimes 1$  devrait s'écrire  $S_1 S_1^* \otimes 1 = \alpha(1 \otimes 1) + \beta$  où  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\beta$  est une combinaison linéaire (finie) de  $S_{u_1} \cdots S_{u_n} \overline{S_{v_1}} \cdots \overline{S_{v_n}} \otimes S^n \overline{S}^n$  avec  $n \geq 1$ .

Il est facile de vérifier que pour  $i = 1, 2$ ,

$$((S_1 \overline{S_1} + S_2 \overline{S_2}) \otimes S \overline{S})(S_i \otimes S) = (1 \otimes (1 - e))(S_i \otimes S) = S_i \otimes S.$$

En conséquence, si  $S_1 \overline{S_1} \otimes 1$  était dans  $\mathcal{T}_2$ , il existerait  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que

$$(1 \otimes (1 - e))(S_1 \overline{S_1} \otimes 1 - \alpha(1 \otimes 1)) = S_1 \overline{S_1} \otimes 1 - \alpha(1 \otimes 1),$$

ce qui est faux, puisque les familles  $(S_1 \overline{S_1}, 1)$  et  $(1, 1 - e)$  sont libres dans leurs espaces vectoriels respectifs.

### 2.2.3 Identification du noyau

Nous chercherons dans cette sous-section à identifier le noyau de la suite exacte 2.2. La première étape ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire :

**Lemme 2.31.** *Les sommes finies d'éléments  $\sum_{I', J'} S_{\xi_{I'}} \bar{S}_{\xi_{J'}} \otimes S^{|I'|} e \bar{S}^{|J'|}$  sont denses dans  $\mathcal{C} = \ker \bar{\pi}$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le relèvement  $\bar{r}$  de la suite exacte (2.2). En effet, par définition, les sommes finies  $\sum_{I, J} S_{\xi_I} \bar{S}_{\xi_J} \otimes S^{|I|} \bar{S}^{|J|}$  sont denses dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ . Fixons une semi-norme sur  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  que nous noterons  $\|\cdot\|$ . Si  $X$  est un élément de  $\ker \bar{\pi}$  et que la somme finie  $X_0 = \sum_{I, J} S_{\xi_I} \bar{S}_{\xi_J} \otimes S^{|I|} \bar{S}^{|J|}$  est  $\varepsilon$ -proche de  $X$ , alors par continuité de  $\bar{\pi} : \|\bar{\pi}(X_0)\| \leq C_{\bar{\pi}} \varepsilon$ .

Par construction, le relèvement  $\bar{r}$  préserve la norme et donc

$$\|X - X_0 - r(\bar{\pi} X_0)\| \leq (1 + C_{\bar{\pi}}) \varepsilon.$$

Par ailleurs, il est clair que  $X_0 - r(\bar{\pi} X_0)$  est une somme finie dans le noyau, et qu'elle s'écrit sous la forme proposée, d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 2.32.** Il découle de ce lemme que  $\mathcal{C}$  est une partie de l'algèbre  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K}$  incluse canoniquement dans  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$ . Par conséquent, si on note  $\sum_{k,l} x_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l$  un élément de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{K}$ , les coefficients  $x_{k,l}$  sont rapidement décroissants en  $k, l$ .

Pour la suite de cette sous-section, nous aurons besoin de la croissance modérée de  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ . Pour raccourcir les expressions, nous posons

**Notation 2.33.**

$$\Xi_l = S_{\xi_l} \otimes S^{|\xi_l|} e \quad \bar{\Xi}_l = \bar{S}_{\xi_l} \otimes e \bar{S}^{|\xi_l|}$$

où

- $|\xi_l|$  est le degré de  $\xi_l$  :  $|\xi_l| = p$  si  $\xi_l \in \mathcal{E}^{(p)}$  ;
- si  $\xi_l = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^1 \otimes \dots \otimes \xi_{\alpha}^p$  alors  $S_{\xi_l} = \sum_{\alpha} S_{\xi_{\alpha}^1} \dots S_{\xi_{\alpha}^p}$ .

**Remarque 2.34.** Une conséquence de la remarque 2.27 est que pour toute norme  $p$  sur  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ , les suites en  $l$   $(p(\bar{\Xi}_l))_l$  et  $(p(\Xi_l))_l$  ont une croissance au plus polynomiale.

**Lemme 2.35.** *Quel que soit  $X \in (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K}$ , la suite  $(\bar{\Xi}_i X \Xi_j)_{i,j}$  est rapidement décroissante. En outre, pour tout  $i, j$ ,  $\bar{\Xi}_i X \Xi_j \in \phi(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})$  où  $\phi : \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K}$  est donné par  $\phi(F) = F \otimes e$ .*

*Démonstration.* Algébriquement,

$$\bar{\Xi}_i \left( \sum_{k,l} x_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l \right) \Xi_j = \sum_{k,l} \bar{S}_{\xi_i} x_{k,l} S_{\xi_j} \otimes e \bar{S}^{|\xi_i|} S^k e \bar{S}^l S^{|\xi_j|} e = \bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|, |\xi_j|} S_{\xi_j} \otimes e,$$

qui est valable pour les sommes finies. Cependant, tous les éléments de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K}$  s'écrivent comme somme d'une suite rapidement décroissante  $x_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l$ . Cette somme est en particulier absolument convergente, et comme la multiplication est continue dans  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K}$ , la seconde partie du lemme est prouvée.

Il suffit maintenant de vérifier que  $(\bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|, |\xi_j|} S_{\xi_j})_{i,j}$  est rapidement décroissante en  $i$  et  $j$ . On le voit en s'appuyant sur la décroissance rapide de  $x_{k,l}$  et la croissance polynomiale des  $\bar{S}_{\xi_i}$ ,  $S_{\xi_j}$ .

Formellement, prenons  $R(i, j)$  un polynôme, fixons  $p$ , une norme sur  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  et prouvons que l'on peut majorer  $p(\bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|, |\xi_j|} S_{\xi_j} R(i, j))$  par une constante. L'algèbre étant modérée,  $p(\bar{S}_{\xi_i}) p(S_{\xi_j})$  est majorée par un polynôme  $Q_0(i, j)$ . Nous pouvons majorer  $|Q_0(i, j) R(i, j)|$  par un polynôme  $Q(i, j)$ . En toute généralité, nous pouvons choisir  $Q$  croissant au sens de

$$i \leq i' \text{ et } j \leq j' \implies Q(i, j) \leq Q(i', j').$$

En effet, en utilisant les relations  $|X^p Y^q| \leq X^{2p} + Y^{2q}$ , il apparaît que l'on peut majorer  $|Q_0(i, j) R(i, j)|$  par  $i^{d_1} + j^{d_2} + K$ , pour  $d_1, d_2$  et  $K$  suffisamment grands. Notons maintenant

$$P(k, l) = \sum_{k', l'=1}^N Q(N(k-1) + k', N(l-1) + l').$$

Il s'agit clairement d'un polynôme croissant (au sens précédent).

Comme  $(p(x_{k,l}))_i$  est rapidement décroissant en  $k, l$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $p(\xi_{k,l})P(k, l) \leq C$ . Estimons

$$p(\bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|, |\xi_j|} S_{\xi_j}) \leq p(x_{|\xi_i|, |\xi_j|}) Q(i, j) \leq p(\xi_{k,l}) P(k_0, l_0) \leq p(\xi_{k,l}) P(k, l) \leq C$$

où  $k_0$  et  $l_0$  sont les parties entières de  $i/N$  et  $j/N$ , respectivement,  $k = |\xi_i|$  et  $l = |\xi_j|$ . D'après la remarque 2.27,  $k_0 \leq k$ . Par construction,  $Q(i, j) \leq P(k_0, l_0)$ , ce qui prouve la seconde inégalité. La troisième inégalité est une conséquence de la croissance de  $P$ .  $\square$

**Lemme 2.36.** *Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse modéré, alors quel que soit  $X \in (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K}$ ,*

- (i) *pour tout  $I \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i=1}^I \Xi_i \bar{\Xi}_i X$  est un élément de  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  ;*
- (ii)  *$\sum_{i=1}^I \Xi_i \bar{\Xi}_i X \xrightarrow{I \rightarrow \infty} X$ , au sens de toutes les normes de  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ .*

*Démonstration.* Commençons par un calcul algébrique :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^I \Xi_i \bar{\Xi}_i \right) X &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^I S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} x_{m,n} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^{|\xi_i|} S^m e \bar{S}^n \\ &= \sum_{i=0}^I \sum_{n=0}^{\infty} S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|,n} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^n, \end{aligned}$$

qui prouve que  $\sum_{i=1}^I \Xi_i \bar{\Xi}_i X$  est dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ , pourvu que la somme ait un sens.

Il est clair que la suite  $x_{m,n}$  est rapidement décroissante en  $m, n$ . La question est : la suite  $S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|,n} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^n$  est-elle rapidement décroissante en  $i$  et  $n$  ?

Nous utilisons les mêmes techniques que pour le lemme 2.35 : on fixe une norme  $p$  et on prend un polynôme  $R(i, n)$ . La suite

$$|R(i, n) p(\Xi_i) p(\bar{\Xi}_i)|$$

peut être majorée par un polynôme  $Q(i, n)$ , que l'on peut choisir croissant au même sens que dans la démonstration du lemme 2.35.

Comme  $x_{m,n}$  est rapidement décroissante et que  $S^m e \bar{S}^n$  est à croissance polynomiale en  $m, n$ , la suite  $(x_{m,n} \otimes S^m e \bar{S}^n)_{m,n}$  est rapidement décroissante. Considérant ensuite le polynôme  $P(m, n) = \sum_{m'=1}^N Q(N(m-1) + m')$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $p(x_{m,n} \otimes S^m e \bar{S}^n) P(m, n) \leq C$ . Nous en déduisons les inégalités

$$p(\Xi_i \bar{\Xi}_i (x_{|\xi_i|,n} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^n)) \leq p(x_{|\xi_i|,n} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^n) P(m_0, n) \leq p(x_{m,n}) P(m, n) \leq C,$$

par les mêmes arguments que pour le lemme 2.35. Par conséquent, la suite en  $I \in \mathbb{N}$

$$\left( \sum_{i=0}^I \sum_{n=0}^{\infty} S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|,n} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^n \right)_I$$

n'est qu'une suite de sommes partielles d'une série sommable. Elle admet donc une limite finie, et nous allons prouver qu'il s'agit de  $X$ .

Pour chaque degré  $m = p \in \mathbb{N}$ , la condition (2.1) associée aux notations 2.24 et 2.33 montre qu'il existe deux entiers  $l_1$  et  $l_2$  tels que  $\sum_{i=l_1}^{l_2} S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} = 1_{\mathcal{A}}$ . Algébriquement, nous voyons que pour chaque  $m$  fixé, si  $I$  est plus grand que  $l_2$ ,

$$\left( \sum_{i=0}^I \Xi_i \bar{\Xi}_i \right) x_{m,n} \otimes S^m e \bar{S}^n = x_{m,n} \otimes S^m e \bar{S}^n.$$

Ainsi, pour chaque  $m$  fixé, nous obtenons l'identité. Les formes linéaires  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  :

$$\sum_{m,n} x_{m,n} \otimes S^m e \bar{S}^n \mapsto x_{m_0, n_0},$$

correspondent à extraire une entrée d'une matrice via l'injection  $\mathcal{C} \hookrightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K} \subseteq (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$ . En évaluant ces formes linéaires sur les sommes partielles, il apparaît que la limite des sommes partielles ne peut être que  $X$  lui-même.

Ainsi, les  $\sum_{i=0}^I \Xi_i \bar{\Xi}_i$  forment une unité approchée de  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Théorème 2.37.** *Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse modéré, il existe un bicontexte de Morita entre l'algèbre  $\mathcal{C}$  du lemme 2.31 et l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Si on note  $\nu_{\mathcal{C}}$  l'injection de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{C}$  donnée par  $a \mapsto a \otimes e$ , ce bicontexte est donné*

- dans le sens  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{A}$  par  $(\text{Id}, \mathcal{C}, \nu_{\mathcal{C}}, \Xi_l, \bar{\Xi}_l)$  ;
- dans le sens  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{C}$  par  $(\nu_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \text{Id}, 1 \otimes e, 1 \otimes e)$ .

*En particulier, si  $H$  est  $\mathcal{K}$ -stable et invariant sous difféotopie, l'inclusion canonique  $\nu_{\mathcal{C}} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$  induit un isomorphisme  $H(\mathcal{A}) \simeq H(\mathcal{C})$ .*

Pour la preuve de ce théorème, nous reprendrons systématiquement les numéros des conditions dans les définitions 2.8 et 2.10.

*Démonstration.* Vérifions tout d'abord que nous avons un contexte de Morita dans le sens  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{A}$  : il est clair que les morphismes d'algèbres choisis sont des isomorphismes sur des sous-algèbres de  $\mathcal{C}$ . Il suffit de vérifier les trois conditions de la définition 2.8 sur la partie dense décrite dans le lemme 2.31. Soit donc  $X = \sum_{k,l} x_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l$ , où  $x_{k,l}$  est homogène de degré  $k - l$ .

- (i) Vérifions que  $\bar{\Xi}_i X \Xi_j$  est dans  $\nu_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ . Nous avons vu au lemme 2.36 que

$$\bar{\Xi}_i \left( \sum_{k,l} x_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l \right) \Xi_j = \bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|, |\xi_j|} S_{\xi_j} \otimes e.$$

Un simple compte prouve que le degré de  $\bar{S}_{\xi_i} x_{|\xi_i|, |\xi_j|} S_{\xi_j}$  est 0 et donc qu'il s'agit d'un élément de  $\mathcal{A}$ . Ainsi,  $\bar{\Xi}_i X \Xi_j \in \nu_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ .

- (ii) C'est une conséquence du lemme 2.35.  
 (iii) C'est une conséquence du lemme 2.36.



Nous pouvons vérifier de même que  $1 \otimes e$  induit un contexte de Morita :

- (i)  $1 \otimes e$  est un élément de  $\mathcal{C}$ , donc les  $(1 \otimes e)X(1 \otimes e) \in \mathcal{C}$ , quel que soit  $X \in \mathcal{C}$  ;
- (ii) la famille est finie donc rapidement décroissante ;
- (iii)  $(1 \otimes e)(1 \otimes e)(a \otimes e) = a \otimes e$ , donc les sommes partielles convergent en norme !

Il suffit maintenant de vérifier que ces deux contextes de Morita satisfont les conditions de la définition 2.10 :

- (i) Cette condition est vide, car l'algèbre support est  $\mathcal{C}$  tout entier.
- (ii)  $(1 \otimes e)(S_{\xi_l} \otimes S^{|\xi_l|}e)$  est nul si  $|\xi_l| \neq 0$ . Cependant, le seul élément de degré 0 est  $\xi_1 = 1$  et alors  $S_{\xi_1} \otimes S^{|\xi_1|}e = 1 \otimes e$ , d'où  $\nu_{\mathcal{C}}(a)(1 \otimes e) = \nu_{\mathcal{C}}(a)$ . De même,  $(\bar{S}_{\xi_l} \otimes e\bar{S}^{|\xi_l|})(1 \otimes e)$  vaut soit 0 (pour  $|\xi_l| \neq 1$ ) soit  $1 \otimes e$  (pour  $|\xi_l| = 1$ ) et dans ce dernier cas  $(1 \otimes e)\nu_{\mathcal{C}}(a) = \nu_{\mathcal{C}}(a)$ .

□

### 2.2.4 Algèbres de Toeplitz et algèbres de base

Dans cette sous-section, nous allons prouver que l'algèbre de Toeplitz lisse  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  est équivalente à l'algèbre de base  $\mathcal{A}$ , quel que soit le foncteur  $H$  semi-exact,  $\mathcal{K}$ -stable et invariant sous difféotopie.

À cet effet, nous considérerons un  $q$ -morphisme  $(\alpha, \bar{\alpha}) : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightrightarrows (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{T} \supseteq \mathcal{C}$ . Nous allons montrer que le morphisme dans la catégorie des groupes abéliens  $H(\alpha, \bar{\alpha})$  est inversible à gauche et à droite – ce qui prouvera qu'il est inversible.

L'inversibilité à droite sera obtenue rapidement en utilisant le théorème 2.37. L'inversibilité à gauche demandera plus d'efforts. Nous devons élargir l'algèbre image du  $q$ -morphisme pour y parvenir. Plus explicitement, nous devons introduire une algèbre  $\mathcal{C}$  et un  $q$ -morphisme  $(\Phi, \Psi) : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightrightarrows Z((\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T}) \supseteq \mathcal{C}$  (lemme 2.40), puis exhiber un contexte de Morita (proposition 2.41) avant de pouvoir conclure (théorème 2.43).

**Lemme 2.38.** *Soit  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$  un produit croisé généralisé lisse modéré, les morphismes  $\alpha, \bar{\alpha} : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightarrow (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$  donnés par*

$$\alpha = \text{Id} \qquad \bar{\alpha} = \text{Ad}(1 \otimes S)$$

*définissent le  $q$ -morphisme minimal  $(\alpha, \bar{\alpha}) : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightrightarrows (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{T} \supseteq \mathcal{C}$ .*

Dans le lemme ci-dessus, nous avons repris la notation  $\mathcal{C}$  de la sous-section 2.2.3.

*Démonstration.* Il suffit de voir que  $\mathcal{C}$  est généré par  $(\alpha - \bar{\alpha})(\mathcal{T}_{\mathcal{C}})$  et que  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ -stable. Comme

$$\begin{aligned} (\alpha - \bar{\alpha})(a \otimes 1) &= a \otimes 1 - (1 \otimes S)(a \otimes 1)(1 \otimes \bar{S}) = a \otimes (1 - S\bar{S}) = a \otimes e, \\ (\alpha - \bar{\alpha})(S_{\xi} \otimes S) &= S_{\xi} \otimes S - (1 \otimes S)(S_{\xi} \otimes S)(1 \otimes \bar{S}) = S_{\xi} \otimes Se, \\ (\alpha - \bar{\alpha})(\bar{S}_{\xi} \otimes \bar{S}) &= \bar{S}_{\xi} \otimes \bar{S} - (1 \otimes S)(\bar{S}_{\xi} \otimes \bar{S})(1 \otimes \bar{S}) = \bar{S}_{\xi} \otimes e\bar{S}, \end{aligned}$$

les images des générateurs sont toutes dans  $\mathcal{C}$  et il est clair que l'algèbre image de  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  par le  $q$ -morphisme  $(\alpha, \bar{\alpha})$  est incluse dans  $\mathcal{C}$ . Comme cette algèbre image doit être  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ -stable, le lemme 2.31 montre qu'il s'agit en fait de  $\mathcal{C}$  tout entier.  $\square$

**Définition 2.39.** Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse modéré, on note  $\bar{\mathcal{C}}$  la sous-algèbre fermée de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{T}$  engendrée par les

$$S_{\xi_I} \bar{S}_{\eta_J} \otimes S^p e S^q \otimes S^{p'} S^{q'},$$

où  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_I \in \mathcal{E}^{(p+p')}$  et  $\eta_J \in \mathcal{E}^{(q+q')}$ .

Nous définissons :

- $\Phi: \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightarrow Z((\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T})$  comme la restriction de  $\text{Id}_{\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}} \otimes (\phi_t)_t$ , où l'application  $(\phi_t)_t: \mathcal{T} \rightarrow Z(\mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T})$  est la difféotopie du lemme 2.18,
- et  $\Psi: \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightarrow Z((\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T})$  comme la restriction de l'application  $\text{Ad}(1 \otimes \hat{S})$ , constante en  $t$ , donnée par  $\text{Ad}(1 \otimes \hat{S})(X) = (1 \otimes \hat{S})(X \otimes 1)(1 \otimes \hat{S})$  pour tout  $X \in (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T}$ .

**Lemme 2.40.** Soit  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  un produit croisé généralisé lisse modéré, les morphismes  $\Phi, \Psi$  introduits ci-dessus définissent un  $q$ -morphisme

$$(\Phi, \Psi): \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightrightarrows Z((\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T} \hat{\otimes} \mathcal{T}) \supseteq \bar{\mathcal{C}}.$$

*Démonstration.* En utilisant la remarque 2.15, il suffit de vérifier que  $\bar{\mathcal{C}}$  contient les  $(\Phi - \Psi)(\mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  et est  $\Psi(\mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ -stable et cette vérification peut se faire sur les générateurs. Sur ces derniers,  $\Phi - \Psi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (\Phi - \Psi)(a \otimes 1) &= a \otimes \hat{1} - a \otimes \hat{S} \hat{S} = a \otimes \hat{e}, \\ (\Phi - \Psi)(S_{\xi} \otimes S) &= S_{\xi} \otimes (\hat{S}(\hat{1} - \hat{e}) + f(t)\check{S} + g(t)\hat{S}\hat{e}) - S_{\xi} \otimes \hat{S}\hat{S}\hat{S} \\ &= S_{\xi} \otimes (f(t)\check{S} + g(t)\hat{S}\hat{e}), \\ (\Phi - \Psi)(\bar{S}_{\xi} \otimes \bar{S}) &= \bar{S}_{\xi} \otimes ((\hat{1} - \hat{e})\hat{S} + f(t)\check{\bar{S}} + g(t)\hat{e}\hat{\bar{S}}) - \bar{S}_{\xi} \otimes \hat{S}\hat{\bar{S}}\hat{\bar{S}} \\ &= \bar{S}_{\xi} \otimes (f(t)\check{\bar{S}} + g(t)\hat{e}\hat{\bar{S}}). \end{aligned}$$

Tous ces éléments sont clairement dans  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Par ailleurs, quel que soit  $X$ , générateur de  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ , les  $X \otimes 1$  sont dans  $\bar{\mathcal{C}}$ , et les  $1 \otimes \hat{S}$  et  $1 \otimes \hat{\bar{S}}$  également. Ainsi, pour tout générateur  $X$  de  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  choisi,  $\Psi(X) \in \bar{\mathcal{C}}$ , ce qui justifie que  $\bar{\mathcal{C}}$  est  $\Psi(\mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ -stable. On peut donc bien définir un  $q$ -morphisme de la façon proposée.  $\square$

**Proposition 2.41.** Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, il existe un contexte de Morita  $(\text{Id}_{\bar{\mathcal{C}}}, \bar{\mathcal{C}}, \iota_1, \Xi'_i, \bar{\Xi}'_j)$  de  $\bar{\mathcal{C}}$  vers  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ , donné par :

- les suites  $\Xi'_i = \Xi_i \otimes 1$  et  $\bar{\Xi}'_i = \bar{\Xi}_i \otimes 1$ , en reprenant la notation 2.33;

– le morphisme  $\iota_1: \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  défini par

$$\iota_1(a \otimes 1) = a \otimes e \otimes 1 \quad \iota_1(S_{\xi} \otimes S) = S_{\xi} \otimes e \otimes S \quad \iota_1(\bar{S}_{\xi} \otimes \bar{S}) = \bar{S}_{\xi} \otimes e \otimes \bar{S},$$

pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $\xi \in \mathcal{E}$ .

*Démonstration.* Nous suivons les conditions de la définition 2.8.

- (i) Algébriquement, si on prend  $Y = S_{\xi_I} \bar{S}_{\xi_J} \otimes S^p e S^q \otimes S^{p'} S^{q'}$  comme dans la définition 2.39,

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}'_i Y \Xi'_j &= (\bar{S}_{\xi_i} \otimes e \bar{S}^{|\xi_i|} \otimes 1) (S_{\xi_I} \bar{S}_{\eta_J} \otimes S^p e S^q \otimes S^{p'} S^{q'}) (S_{\xi_j} \otimes S^{|\xi_j|} e \otimes 1) = \\ &= \delta_{|\xi_i|,p} \delta_{|\xi_j|,q} \bar{S}_{\xi_i} S_{\xi_I} \bar{S}_{\eta_J} S_{\xi_j} \otimes e \otimes S^{p'} \bar{S}^{q'}. \end{aligned}$$

Par simple calcul de degré, il apparaît que  $\bar{\Xi}'_i Y \Xi'_j$  est dans  $\iota_1(\mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ .

- (ii) La preuve est très similaire à celle du lemme 2.35. Comme  $\bar{\mathcal{C}}$  est une sous-algèbre de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{T}$ , en utilisant l'isomorphisme canonique avec  $((\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$  on peut écrire tous les éléments de  $\bar{\mathcal{C}}$  sous la forme

$$\sum_{k,l} Y_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l, \quad (2.3)$$

où  $Y_{k,l}$  est une suite rapidement décroissante en  $k, l$  de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$ . De la même façon que dans le lemme 2.35, les suites  $\bar{\Xi}'_i$  et  $\Xi'_j$  ont des croissances polynomiales en  $i, j$ , tout comme  $S^k e \bar{S}^l$  a une croissance polynomiale. La suite rapidement décroissante  $Y_{k,l}$  peut donc « absorber » ces termes et  $\bar{\Xi}'_i Y \Xi'_j$  est une suite rapidement décroissante de  $(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \hat{\otimes} \mathcal{T}$ .

- (iii) La preuve est très proche de celle du lemme 2.36 : en effet, algébriquement

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}'_i \bar{\Xi}'_i Y &= (S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} \otimes S^{|\xi_i|} e \bar{S}^{|\xi_i|} \otimes 1) (S_{\xi_I} \bar{S}_{\eta_J} \otimes S^p e S^q \otimes S^{p'} S^{q'}) = \\ &= \delta_{|\xi_i|,p} S_{\xi_i} \bar{S}_{\xi_i} S_{\xi_I} \bar{S}_{\eta_J} \otimes S^p e S^q \otimes S^{p'} \bar{S}^{q'} \end{aligned}$$

et, toujours algébriquement, grâce à l'équation (2.1) il suffit de faire la somme sur les  $\xi_i$  tels que  $|\xi_i| = p$  pour « reconstruire »  $Y$ . Tout comme pour le point précédent, nous pouvons partir de la forme (2.3) avec  $Y_{k,l}$  rapidement décroissante. La fin de l'argument est similaire à celui du lemme 2.36 : on prouve que la suite  $\bar{\Xi}'_i \bar{\Xi}'_i Y_{|\xi_i|,l}$  est rapidement décroissante donc sommable, puis on montre que la limite est nécessairement  $\sum_{k,l} Y_{k,l} \otimes S^k e \bar{S}^l$ , en extrayant des coefficients dans cette matrice.  $\square$

On définit un morphisme  $\sigma_1: \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \hat{\otimes} \mathcal{K}$  pour  $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  par

$$\sigma_1(X) = X \otimes e,$$

$\mathcal{K}$  étant identifiée avec l'algèbre engendrée par les  $S^p e \bar{S}^q$  pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , comme dans la définition 2.17. Si  $H$  est  $\mathcal{K}$ -stable,  $H(\sigma_1) = \text{Id}_{H(\mathcal{T}_{\mathcal{E}})}$ .

**Lemme 2.42.** *Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse modéré et si  $H$  est  $\mathcal{K}$ -stable et split exact, la composée de  $(\Phi_1, \Psi_1)$  et du contexte de Morita ci-dessus induit le même morphisme à travers  $H$  que  $\sigma_1$ .*

*Par conséquent,  $H(\Phi_1, \Psi_1)$  est inversible à gauche.*

*Démonstration.* Comme  $\phi_t$  préserve l'unité,

$$\begin{aligned}\Phi_1(a \otimes 1) &= a \otimes 1 \otimes 1 = (\text{Ad}(1 \otimes \hat{S})(a \otimes \hat{1})) + (a \otimes \check{1}), \\ \Phi_1(S_{\xi} \otimes S) &= S_{\xi} \otimes (\hat{S}^2 \hat{S} + \check{S}) = (\text{Ad}(1 \otimes \hat{S})(S_{\xi} \otimes \hat{S})) + (S_{\xi} \otimes \check{S}).\end{aligned}$$

En outre,  $\text{Im}(\text{Ad}(1 \otimes \hat{S}))$  et  $\text{Im}(\iota_1)$  sont orthogonaux car  $\bar{S}e = 0 = eS$ . Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.13 et en déduire

$$H(\Phi_1, \Psi_1) = H(\text{Ad}(1 \otimes \hat{S}) \oplus \iota_1, \text{Ad}(1 \otimes \hat{S})) = H(\iota_1).$$

Au vu de la proposition 2.41, il est facile de montrer que la composée de  $H(\iota_1)$  et du morphisme induit par le contexte de Morita n'est rien d'autre que  $H(\sigma_1)$ .

Comme  $H$  est  $\mathcal{K}$ -stable,  $H(\sigma_1) = 1_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

Rappelons que l'injection  $\iota_{\mathcal{C}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  a été définie dans le théorème 2.37 et le  $\mathfrak{q}$ -morphisme  $(\alpha, \bar{\alpha}): \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \rightrightarrows (\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{T} \supseteq \mathcal{C}$  par le lemme 2.38. Nous prenons  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ , l'inclusion canonique et notons  $\iota'_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  la restriction de  $\iota_1$  à  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 2.43.** *Soient  $H$  un foncteur split exact de la catégorie des algèbres localement convexes dans la catégorie des groupes abéliens et  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  un produit croisé généralisé lisse et modéré. Posons  $y = H(\alpha, \bar{\alpha})$ ,*

- (i) *si  $H(\iota_{\mathcal{C}}): H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{C})$  est inversible à droite, alors  $y$  est inversible à droite;*
- (ii) *si  $H$  est invariant sous difféotopie et  $\mathcal{K}$ -stable, alors  $y$  est inversible à gauche.*

*En particulier, sous les hypothèses de (ii),  $H(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \simeq H(\mathcal{A})$  et l'isomorphisme est réalisé par l'inclusion  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ .*

*Démonstration.* Pour prouver que  $y$  est inversible, il suffit de prouver qu'il est inversible à gauche et à droite. Si  $y$  est inversible,  $H(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \simeq H(\mathcal{C})$  et par le théorème 2.37,  $H(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \simeq H(\mathcal{A})$ .

Le premier point est clair grâce à la proposition 2.13. En effet,

$$H(\alpha, \bar{\alpha}) \circ H(\iota) = H(\alpha \circ \iota, \bar{\alpha} \circ \iota) = H(\iota_{\mathcal{C}}). \quad (2.4)$$

Ainsi, si  $z$  est un inverse à droite de  $H(\iota_{\mathcal{C}})$ , alors  $H(\iota) \circ z$  est un inverse à droite de  $y$ .

Pour prouver le point (ii), nous partons du lemme 2.42. Comme  $H$  est invariant sous difféotopie,  $H(\Phi_0, \Psi_0) = H(\Phi_1, \Psi_1)$  est inversible à gauche. Or il est facile de voir que  $(\Phi_0, \Psi_0)$  n'est rien d'autre que la composée de  $(\alpha, \bar{\alpha})$  avec le morphisme  $\iota'_1$ . Nous en déduisons que  $(\alpha, \bar{\alpha})$  est inversible à gauche.

Enfin, nous avons vu que  $H(\iota_{\mathcal{C}})$  était inversible, tout comme  $H(\alpha, \bar{\alpha})$ . L'équation (2.4) nous permet alors d'affirmer que  $\iota$  est inversible, et réalise donc l'équivalence  $H(\mathcal{A}) \simeq H(\mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ .  $\square$

### 2.2.5 Synthèse

Dans cette section, nous faisons la synthèse des résultats précédents pour obtenir le théorème escompté et son application à la cohomologie cyclique périodique.

**Théorème 2.44.** *Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse à croissance modérée, alors pour tout foncteur  $H$  semi-exact,  $\mathcal{K}$ -stable et invariant sous difféotopie, l'hexagone suivant est exact :*

$$\begin{array}{ccccc} H(\mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H(j)} & H(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ H(\mathcal{S}(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})) & \xleftarrow{H(\mathcal{S}j)} & H(\mathcal{S}\mathcal{A}) & \xleftarrow{\quad} & H(\mathcal{S}\mathcal{A}) \end{array}$$

où  $\mathcal{S}$  est la suspension lisse et  $j$  est l'injection canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Au vu des résultats précédents, il suffit de combiner le lemme 2.20 avec l'extension (2.2) pour obtenir une suite exacte à six termes. Les théorèmes 2.37 et 2.43 permettent alors d'écrire :

$$\begin{array}{ccccc} H(\mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{A}) & & \\ \simeq \downarrow H(\iota_{\mathcal{C}}) & & \simeq \downarrow H(\iota) & & \\ H(\mathcal{C}) & \longrightarrow & H(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{H(\pi)} & H(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ H(\mathcal{S}(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})) & \xleftarrow{\quad} & H(\mathcal{S}\mathcal{T}_{\mathcal{E}}) & \xleftarrow{\quad} & H(\mathcal{S}\mathcal{C}) \end{array}$$

où

- pour simplifier, nous ne traitons que les  $H(\mathcal{A})$  – les mêmes arguments s'appliquent également aux  $H(\mathcal{S}\mathcal{A})$  –;
- la flèche  $H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{A})$  qui fait commuter le diagramme est définie en utilisant les isomorphismes  $H(\iota_{\mathcal{C}})$  et  $H(\iota)$ .

Il est alors facile de vérifier que  $j(a) = \pi \circ \iota(a)$ , ce qui justifie le diagramme ci-dessus.  $\square$

En vue des applications du chapitre 3, nous spécialisons nos résultats d'une part à la  $kk$ -théorie et d'autre part à la cohomologie cyclique périodique  $HP$ .

Pour formuler le théorème suivant, nous utiliserons la  $kk$ -théorie de CUNTZ décrite dans [26]. Ici, nous noterons  $k_0(\mathcal{A}) := kk(\mathbb{C}, \mathcal{A})$  et  $k_1(\mathcal{A}) := kk(\mathbb{C}, \mathcal{S}\mathcal{A})$ .

**Théorème 2.45.** *Si  $\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}$  est un produit croisé généralisé lisse à croissance modérée qui est une  $m$ -algèbre, alors les hexagones suivants sont exacts :*

$$\begin{array}{ccccc} k_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & k_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & k_0(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \\ \partial \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ k_1(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\quad} & k_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{\quad} & k_1(\mathcal{A}) \end{array} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 HP^0(\mathcal{A}) & \longleftarrow & HP^0(\mathcal{A}) & \longleftarrow & HP^0(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) \\
 \# \downarrow & & & & \uparrow \# \\
 HP^1(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}) & \longrightarrow & HP^1(\mathcal{A}) & \longrightarrow & HP^1(\mathcal{A}).
 \end{array} \tag{2.6}$$

En outre, ces deux diagrammes sont compatibles au sens où pour  $j$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,

$$\forall K \in k_j(\mathcal{D}), \psi \in HP^{j+1}(\mathcal{A}), \quad \langle K, \# \psi \rangle = i2\pi \langle \partial K, \psi \rangle.$$

**Remarque 2.46.** Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Fréchet (et donc une  $m$ -algèbre) et qu'elle est également une sous-algèbre lisse (au sens de la définition 1.56) de la  $C^*$ -algèbre  $A$ , alors  $k_j(\mathcal{A}) = K_j(A)$ .

Il s'agit d'une conséquence du théorème 4.11 p. 47 de [26] d'une part, et du théorème 1.58 d'autre part. Dans ce cas, on retrouve la suite exacte de Pimsner pour les  $C^*$ -algèbres (voir [41]).

*Démonstration*

D'après le théorème 4.9 de [26], la  $kk$ -théorie de CUNTZ est  $\mathcal{K}$ -stable et invariante sous difféotopie. Par ailleurs, toute suite exacte courte linéairement scindée induit une suite exacte à 6 termes (voir le théorème 4.10 de [26]), ce qui prouve en particulier que  $kk(\mathbb{C}, \cdot)$  est semi-exact. Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.44 et obtenir la suite exacte mentionnée ci-dessus.

Pour la partie concernant la cohomologie cyclique périodique, l'idée de la preuve est de combiner la propriété d'excision de [25] avec le théorème 1.5 de [39]. Cependant, les articles mentionnés ci-dessus se placent dans un cadre purement algébrique, ce qui nous oblige à nous appuyer sur d'autres références pour prendre en compte les propriétés analytiques.

Nous interprétons le  $HP$  bivariant muni du produit défini à la page 19 de [26] comme un foncteur vers une catégorie dont les objets sont les  $m$ -algèbres et les morphismes entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont les éléments de  $HP(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Il résulte de la section 3.1 pp. 36–38 de [26] que le  $HP$  (continu) est semi-exact,  $\mathcal{K}$ -stable et invariant sous difféotopie.

Partons de la suite exacte courte (2.2). Nous pouvons utiliser la suite exacte pour  $HP(\cdot, \mathbb{C})$  obtenue grâce au théorème 2.50 p. 33 de [26] (ou plus précisément de la « version continue » du même théorème). Les équivalences de  $HP$  données par les théorèmes 2.37 et 2.43 nous permettent alors d'écrire l'hexagone exact (2.6).

Le corollaire 4.17 p. 49 de [26] nous assure de l'existence d'un caractère de Chern-Connes  $ch$  entre les foncteurs bivariants  $kk$  et  $HP$ . L'appariement que nous considérons est obtenu par composition de ce caractère  $ch$  avec la dualité entre homologie et cohomologie cycliques. Ce « produit de Kronecker » s'obtient grâce au produit  $HP(\mathbb{C}, \mathcal{A}) \times HP(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \rightarrow HP(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ . Ainsi, pour  $K \in k_i(\mathcal{A})$  et  $\psi \in HP^i(\mathcal{A})$ ,

$$\langle K, \psi \rangle = ch(K) \cdot \psi$$

La flèche de bord  $\partial$  provient de la multiplication par un élément  $\delta \in kk_1(\mathcal{A}, \mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})$ . La multiplication par  $ch(\delta)$  induit une application  $HP^i(\mathcal{A}) \rightarrow HP^{i+1}(\mathcal{A} \rtimes_{\mathcal{E}} \mathbb{Z})$ . Cependant, pour passer de  $ch(\partial)$  à  $\#$ , nous devons prendre en compte un facteur  $2\pi i$ , à cause de la proposition 4.18 p. 50 de [26]. Ce facteur  $2\pi i$  est également mentionné dans [39] pp. 273–274 et [38] p. 283. L'égalité proposée est alors une conséquence de la propriété de compatibilité de  $ch$  avec le produit (voir le théorème 4.20, p. 50 de [26] et la remarque qui suit).  $\square$

## Chapitre 3

# Exemple : variétés de Heisenberg quantiques

Dans ce chapitre, nous étudions les *variétés de Heisenberg quantiques* (QHM). Nous nous appuyons sur les notions générales du chapitre précédent pour décrire leur cohomologie cyclique périodique. RIEFFEL a défini ces algèbres en 1989, comme déformations-quantifications d'espaces homogènes sur le groupe de Heisenberg  $H_3$ . Dans l'article [6] de 1998, ABADIE, EXEL et EILERS ont introduit la notion de *produit croisé généralisé* et prouvé que les QHM entrent dans ce cadre.

Dans une première section, nous donnons une définition des variétés de Heisenberg quantiques (QHM). Ces algèbres constituent une famille de  $C^*$ -algèbres  $D_{\mu,\nu}^c$  à trois paramètres  $c \in \mathbb{Z}, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Nous les considérons tout d'abord dans une forme « abstraite », qui permet de voir clairement quels sont les rôles respectifs de  $c$ ,  $\mu$  et  $\nu$ . Nous nous rapprochons ensuite de la littérature antérieure – et tout particulièrement de [6] – en prouvant un isomorphisme avec une forme « concrète » de l'algèbre. Nous rappelons alors qu'il existe une action du groupe de Heisenberg  $H_3$  sur  $D_{\mu,\nu}^c$ .

La seconde section s'appuie sur cette action pour définir une sous-algèbre lisse  $\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c$  de  $D_{\mu,\nu}^c$ . Les résultats pré-existants de [2] d'une part et ceux du chapitre 1 d'autre part nous permettent de déterminer la  $K$ -théorie puis de construire des cocycles cycliques pour cette algèbre lisse.

Les deux sections suivantes contiennent les calculs des appariements entre cohomologie cyclique et  $K$ -théorie : nous donnons d'abord des représentants *explicites* des  $K$ -théories paire et impaire, puis nous voyons comment l'action du groupe de Heisenberg permet de calculer ces appariements.

La dernière section fait la synthèse entre les résultats des chapitres 2 et 3 : les QHM lisses remplissent bien toutes les conditions requises pour appliquer les résultats de 2, ce qui nous fournit un hexagone exact. Nous pouvons alors utiliser cet hexagone pour déterminer la cohomologie cyclique périodique des algèbres lisses. En combinant ces résultats avec ceux du début du chapitre, des *bases explicites* de  $HP^*(\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c)$  apparaissent naturellement. Nous terminons par noter l'existence d'une « formule de transfert » pour les QHM lisses – ce qui ouvre des perspectives de généralisation.



### 3.1 Définitions & propriétés élémentaires

#### 3.1.1 Modules et bimodules hilbertiens sur $C(T^2)$

Dans la suite de ce chapitre, nous noterons  $A = C(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$  et  $e(\theta) = e^{i2\pi\theta}$ .

RIEFFEL a donné une classification des modules projectifs de type fini sur  $A = C(T^2)$  dans son article [44]. Pour faciliter la lecture, nous présentons ici les résultats de son étude (voir [44], notation 3.7 et théorème 3.9) :

**Définition 3.1** (modules  $E^{c,d}$ ). Pour  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ , les espaces vectoriels  $E^{c,d}$  définis par :

$$E^{c,d} = \left\{ \xi \in C(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}) \text{ tel que } \begin{cases} \xi(x+d, y) = e(-cy)\xi(x, y) \\ \xi(x, y+1) = \xi(x, y) \end{cases} \right\}$$

sont des  $C(T^2)$ -modules pour le produit à droite point par point :

$$(\xi \cdot a)(x, y) = \xi(x, y)a(x, y). \quad (3.1)$$

**Théorème 3.2** (Rieffel, 1983). *Tous les modules projectifs de type fini sur  $A = C(T^2)$  sont isomorphes à un  $E^{c,d}$  pour  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ .*

Avec cette notation, l'entier  $d$  est la « dimension » du module et  $c$  est son « gauchissement » (*twist*). Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux modules de dimension  $d = 1$  que nous noterons simplement  $E^c$  au lieu de  $E^{c,1}$ .

**Lemme 3.3.** *Les modules  $E^c$  munis du produit point par point (3.1) et du produit scalaire à valeurs dans  $A$*

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A(x, y) = \overline{\xi_1(x, y)} \xi_2(x, y)$$

*sont des modules hilbertiens sur  $A$ .*

*Démonstration.* Nous savons déjà que  $E^c$  est un module projectif de type fini sur  $A$ . Le produit scalaire prend bien ses valeurs dans  $A$  : en effet, l'expression  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A(x, y)$  est une fonction continue de  $x$  et  $y$ , qui est 1-périodique en  $y$ . Pour la périodicité sur  $x$ ,

$$\begin{aligned} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A(x+1, y) &= \overline{\xi_1(x+1, y)} \xi_2(x+1, y) = \\ &= e(cy)e(-cy)\overline{\xi_1(x, y)} \xi_2(x, y) = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A(x, y). \end{aligned}$$

La sesquilinéarité du produit scalaire est évidente, tout comme l'égalité  $\langle \xi_1, \xi_2 a \rangle_A = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A a$ . La propriété  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A^* = \langle \xi_2, \xi_1 \rangle_A$  ne présente pas de difficulté, tout comme le fait que  $\langle \xi, \xi \rangle_A \geq 0$  pour tout  $\xi \in E^c$ .

Il reste juste à prouver que  $E^c$  est complet. Or la norme de module hilbertien est

$$\sqrt{\|\langle \xi, \xi \rangle_A\|} = \sqrt{\sup_{(x,y) \in T^2} |\xi|^2(x, y)} = \sup_{(x,y) \in T^2} |\xi|(x, y) = \|\xi\|_\infty,$$

qui est une notion bien définie puisque  $|\xi|$  est une fonction sur  $T^2$  – comme on peut le voir en étudiant la définition 3.1.

Une limite uniforme de fonctions continues est continue et les relations de définition de  $E^c$  sont clairement stables par limite simple. Par conséquent,  $E^c$  est complet.  $\square$

Pour définir une structure de *bimodule* hilbertien, nous ajouterons simplement un automorphisme de l'algèbre de base. Choisissons  $c \in \mathbb{Z}, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  et notons  $\sigma$  l'automorphisme de  $A$  défini par

$$\sigma(a)(x, y) = a(x - 2\mu, y - 2\nu).$$

**Lemme 3.4.** *On définit un  $A$ - $A$ -bimodule hilbertien  $E_{\mu, \nu}^c$  à partir du module hilbertien  $E^c$  auquel on ajoute l'action à gauche*

$$(a \cdot \xi)(x, y) = (\xi \sigma^{-1}(a))(x, y) = \xi(x, y) a(x + 2\mu, y + 2\nu)$$

et le produit scalaire

$${}_A \langle \xi_1, \xi_2 \rangle (x, y) = \xi_1(x - 2\mu, y - 2\nu) \overline{\xi_2(x - 2\mu, y - 2\nu)} = \sigma(\langle \xi_2, \xi_1 \rangle_A)(x, y). \quad (3.2)$$

*Démonstration.* Il est clair que les relations précédentes définissent un  $A$ - $A$ -bimodule. Vérifions la compatibilité de  ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle$  avec la multiplication à gauche :

$${}_A \langle a \xi_1, \xi_2 \rangle = \sigma(\langle \xi_2, a \xi_1 \rangle_A) = \sigma(\langle \xi_2, \xi_1 \sigma^{-1}(a) \rangle_A) = \sigma(\langle \xi_2, \xi_1 \rangle_A) a = a {}_A \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$$

car l'algèbre  $A$  est commutative. Les autres propriétés de  ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle$  découlent facilement de 3.2 et des propriétés de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .

Il nous suffit maintenant de vérifier la compatibilité des produits scalaires :

$${}_A \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \xi_3 = \xi_3 \sigma^{-1}({}_A \langle \xi_1, \xi_2 \rangle) = \xi_3 \langle \xi_2, \xi_1 \rangle_A.$$

Comme

$$(\xi_3 \langle \xi_2, \xi_1 \rangle_A)(x, y) = \xi_3(x, y) \overline{\xi_2(x, y)} \xi_1(x, y) = \xi_1(x, y) (\langle \xi_2, \xi_3 \rangle_A)(x, y),$$

les deux produits scalaires vérifient  ${}_A \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \xi_3 = \xi_1 \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_A$  et  $E_{\mu, \nu}^c$  est donc un bimodule hilbertien.  $\square$

**Lemme 3.5.** *Pour chaque  $(c, \mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ ,*

- *il existe un repère de  $E_{\mu, \nu}^c$  d'au plus deux éléments. En outre ces générateurs peuvent être choisis dans  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C})$  ;*
- *$E_{\mu, \nu}^c$  est un  $A$ - $A$ -bimodule d'équivalence de Morita.*

*Pour  $c \neq 0$ , nous pouvons choisir le repère  $(\xi_1, \xi_2)$  tel que*

$$\sum_{i=1}^2 {}_A \langle \xi_i, \xi_i \rangle = 1 \qquad \sum_{i=1}^2 \langle \xi_i, \xi_i \rangle_A = 1. \quad (3.3)$$

Dans la suite, nous abrègerons autant que possible les notations en écrivant  $E$  à la place de  $E_{\mu, \nu}^c$ .

*Démonstration.* Pour  $c = 0$ ,  $E_{\mu, \nu}^0$  est en fait le bimodule associé à l'automorphisme  $\sigma$  de  $A$ . La fonction constante 1 constitue clairement un repère et  $1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C})$ .

Si  $c \neq 0$ , nous devons utiliser deux éléments pour générer  $E_{\mu,\nu}^c$ . Si  $\tilde{\xi}$  est une fonction complexe sur  $[-1/2, 1/2] \times S^1$  qui s'annule avec toutes ses dérivées en  $\{-1/2\} \times S^1$  et en  $\{1/2\} \times S^1$ , on peut l'étendre en un élément de  $E$  en posant

$$\xi(x+1, y) = e(-cy)\xi(x, y).$$

Nous pouvons définir une fonction lisse  $\tilde{\xi}_1$  sur  $[-1/2, 1/2] \times S^1$  à partir de la fonction  $\chi_1$  du lemme A.1, en posant :

$$\tilde{\xi}_1(x, y) = \chi_1(x).$$

Cette fonction s'étend ensuite un élément  $\xi_1$  de  $E$ . Comme  $\tilde{\xi}_1$  s'annule avec toutes ses dérivées aux points de raccord,  $\xi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C})$ .

Nous pouvons utiliser un procédé similaire (mais à partir de la fonction  $\chi_2$  sur  $[0, 1]$ ) pour définir un élément  $\xi_2 \in M$ , qui est également dans  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C})$ .

Il est clair que

$$\langle \xi_i, \xi_i \rangle_A = \chi_i \overline{\chi_i} \quad A \langle \xi_i, \xi_i \rangle = \sigma(\overline{\chi_i}) \sigma(\chi_i),$$

ce qui nous permet d'affirmer

$$\sum_{i=1}^2 A \langle \xi_i, \xi_i \rangle = 1 \quad \sum_{i=1}^2 \langle \xi_i, \xi_i \rangle_A = 1.$$

et donc que la famille  $(\xi_i)$  est un repère pour  $E_A$  et  ${}_A E$ , d'après la remarque 1.46.

Pour prouver que les  $E$  sont des bimodules d'équivalence de Morita, il suffit de prouver qu'ils sont pleins à gauche et à droite. Pour  $c = 0$ , cette propriété est évidente. Pour  $c \neq 0$ , nous pouvons reprendre la famille  $(\xi_i)$  et remarquer que

$$a = \sum_{i=1}^2 A \langle a \xi_i, \xi_i \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \xi_i, \xi_i a \rangle_A.$$

□

### 3.1.2 Variétés de Heisenberg quantiques

**Définition 3.6** (variétés de Heisenberg quantiques). Les *variétés de Heisenberg quantiques* ou QHM (Quantum Heisenberg Manifolds) sont les produits croisés généralisés  $A \rtimes_{E_{\mu,\nu}^c} \mathbb{Z}$  associés aux bimodules  $E_{\mu,\nu}^c$ .

Pour rapprocher notre définition de celle donnée dans [6], nous allons prouver un isomorphisme entre  $A \rtimes_{E_{\mu,\nu}^c} \mathbb{Z}$  et une algèbre plus « concrète ».

**Proposition 3.7.** Pour  $c \in \mathbb{Z}$  et  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ , on définit une algèbre  $D_{\mu,\nu,0}^c$  en considérant l'ensemble des fonctions lisses de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$ , à support compact sur  $\mathbb{Z}$ , qui vérifient :

$$F(x+1, y, p) = e(-cp(y-p\nu))F(x, y, p) \quad F(x, y+1, p) = F(x, y, p) \quad (3.4)$$

et en munissant cet ensemble du produit

$$(F_1 \cdot F_2)(x, y, p) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} F_1(x, y, q) F_2(x - q2\mu, y - q2\nu, p - q). \quad (3.5)$$

Cette algèbre se représente fidèlement sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  obtenu en prenant le complété de  $D_{\mu, \nu, 0}^c$  pour le produit scalaire :

$$\langle F, G \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{[0,1] \times [0,1]} \overline{F(x, y, p)} G(x, y, p) dx dy. \quad (3.6)$$

Par la suite, les sous-algèbres  $D_{\mu, \nu, 0}^c$  seront notées  $D_0$  quand c'est possible.

Avant de passer à la démonstration, notons que l'équation (3.4) nous assure que la norme infinie de chacun des  $F(\cdot, \cdot, p)$  (pour  $p$  fixé) est finie.

*Démonstration.* Pour vérifier qu'il s'agit d'une algèbre, il suffit de montrer que (3.4) est bien vérifiée par le produit : le reste est évident. Or,

$$\begin{aligned} (F_1 \cdot F_2)(x + 1, y, p) &= \sum_q F_1(x + 1, y, q) F_2(x + 1 - q2\mu, y - q2\nu, p - q) \\ &= \sum_q e(-cq(y - q\nu)) F_1(x, y, q) e(-c(p - q)(y - q2\nu - (p - q)\nu)) \\ &\quad F_2(x - q2\mu, y - q2\nu, p - q) \\ &= \sum_q e(-cq(y - q\nu)) e(-c(p - q)(y - (p + q)\nu)) (F_1 \cdot F_2)(x, y, q) \\ &= \sum_q e(-c(py + (-q^2 - p^2 + q^2)\nu)) (F_1 \cdot F_2)(x, y, p) \\ &= \sum_q e(-cp(y - p\nu)) (F_1 \cdot F_2)(x, y, p). \end{aligned}$$

Nous devons maintenant prouver que la formule (3.6) définit un produit scalaire sur  $D_{\mu, \nu, 0}^c$ . Notons tout d'abord que d'après (3.4), quel que soit  $p$ ,  $\overline{F(x, y, p)} G(x, y, p)$  est une fonction 1-périodique en  $x$ . Nous voyons donc que la formule définit bien un réel quels que soient  $F$  et  $G$  dans  $D_{\mu, \nu, 0}^c$ . Par ailleurs, ce produit scalaire est clairement sesquilinéaire et défini positif, ce qui prouve que  $D_{\mu, \nu, 0}^c \hookrightarrow \mathcal{H}$ .

L'algèbre  $D_{\mu, \nu, 0}^c$  est représentée sur  $\mathcal{H}$ , car quitte à majorer brutalement  $F$  par la somme des normes infinies des  $F(\cdot, \cdot, p)$ , il est clair que  $G \mapsto FG$  est continue pour le produit scalaire.

Pour la fidélité de la représentation, remarquons que  $F(x, y, p) = \delta_{p,0}$  est l'unité de  $D_{\mu, \nu, 0}^c$  – que nous noterons 1. Comme  $D_{\mu, \nu, 0}^c \hookrightarrow \mathcal{H}$ , nous avons ensuite  $\langle F, F1 \rangle = \sum_p \int_{[0,1] \times S^1} \overline{F(x, y, p)} F(x, y, p) dx dy$ , qui est strictement positif dès que  $F$  est non nul.  $\square$

**Définition 3.8** (algèbres  $D_{\mu, \nu}^c$ ). Pour  $c \in \mathbb{Z}, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ , nous notons  $D_{\mu, \nu}^c$  la  $C^*$ -algèbre obtenue en complétant  $D_{\mu, \nu, 0}^c$  au sens de la norme de  $B(\mathcal{H})$ .

**Remarque 3.9.** Il est alors facile de vérifier que l'adjoint d'un élément  $F$  dans  $D_{\mu,\nu}^c$  est donné par :

$$F^*(x, y, p) = \overline{F(x - 2p\mu, y - 2p\nu, -p)} \quad (3.7)$$

Pour alléger les notations, nous écrirons  $D$  à la place de  $D_{\mu,\nu}^c$  quand c'est possible. Il existe une action de jauge sur  $D$ , que l'on obtient comme action adjointe d'un groupe d'unitaire sur  $\mathcal{H}$  :

**Définition 3.10** (action de jauge). Les applications  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}}$  définies sur  $\mathcal{H}$  par

$$(U_t F)(x, y, p) = e^{-i2\pi p t} F(x, y, p)$$

pour  $F \in D_0$  forment un groupe d'unitaires de  $B(\mathcal{H})$ .

On peut définir une action de jauge  $\gamma$  sur  $D$  comme action adjointe :

$$\gamma_t(F) = U_{-t} F U_t.$$

La démonstration requise par cette définition est évidente.

**Remarque 3.11.** L'action de jauge  $\gamma$  définie ci-dessus est continue point par point, puisque la remarque 1.19 s'applique à notre situation.

L'intérêt des algèbres  $D$  provient de la proposition suivante :

**Proposition 3.12.** *Pour tous  $c \in \mathbb{Z}, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ , l'algèbre  $D_{\mu,\nu}^c$  est isomorphe au produit croisé généralisé  $A \rtimes_{E_{\mu,\nu}^c} \mathbb{Z}$ .*

Dans la suite, nous utiliserons le terme de QHM pour parler des algèbres  $D$  – de façon à nous rapprocher des notations de la littérature.

*Démonstration.* Nous allons prouver l'isomorphisme en utilisant le théorème d'invariance de jauge 1.53. Pour ce faire, nous devons prouver qu'il existe une représentation covariante  $(\pi, \Phi)$  de  $E^c$  sur  $D_{\mu,\nu}^c$ . Prenons

$$\pi(a)(x, y, p) = \delta_{0,p} a(x + 2\mu, y + 2\nu) \quad \Phi(\xi)(x, y, p) = \delta_{1,p} \xi(x, y).$$

$(\pi, \Phi)$  est une bien une représentation du bimodule hilbertien  $E_{\mu,\nu}^c$ . En effet,  $\pi$  est un homomorphisme d'algèbres et l'application  $\Phi$  vérifie

$$(\Phi(\xi)^* \Phi(\zeta))(x, y, p) = \delta_{p,0} \overline{\Phi(\xi)(x + 2\mu, y + 2\nu)} \zeta(x + 2\mu, y + 2\nu) = \pi(\langle \xi, \zeta \rangle_A)(x, y, p)$$

ainsi que

$$(\Phi(\zeta) \Phi(\xi)^*)(x, y, p) = \delta_{p,0} \zeta(x, y) \overline{\Phi(\xi)(x, y)} = \pi({}_A \langle \xi, \zeta \rangle)(x, y, p).$$

D'après la remarque 1.49, ces deux propriétés suffisent pour avoir une représentation covariante. Il est clair que  $\pi$  est injective et comme la représentation admet clairement une action de jauge (voir la définition 3.10), le théorème 1.53 s'applique et  $A \rtimes_E \mathbb{Z}$  et  $D$  sont isomorphes.  $\square$

Dans la suite, il sera utile de considérer  $D$  comme une algèbre graduée.

**Définition 3.13** (modules  $M_{\mu,\nu}^c$ ). L'action de jauge  $\gamma$  sur  $D_{\mu,\nu}^c$  induit une graduation de cette algèbre par les espaces spectraux de l'action. Plus précisément, pour tous  $c, p \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ , nous notons  $D^{(p)}$  ou  $M_{p\mu,p\nu}^{pc}$  l'espace spectral associé à  $p$ , c'est-à-dire

$$M_{\mu,\nu}^c = \{F \in D_{\mu,\nu}^c \mid \gamma_t(F) = e^{i2\pi pt} F\}.$$

Il est facile de vérifier que  $M_{p\mu,p\nu}^{pc}$  est un bimodule hilbertien sur l'espace spectral associé à 0 – qui n'est rien d'autre que  $A = C(T^2)$ . Les produits scalaires sont définis de façon évidente en utilisant l'involution de l'algèbre :

$$\langle \xi, \zeta \rangle_A = \xi^* \zeta \qquad A \langle \xi, \zeta \rangle = \xi \zeta^*.$$

La notation  $M_{p\mu,p\nu}^{pc}$  est bien définie, car le  $p^e$  espace spectral de  $D_{\mu,\nu}^c$  est isomorphe au premier espace spectral de  $D_{p\mu,p\nu}^{pc}$ .

**Remarque 3.14.** Le lemme 3.5 donne un repère explicite pour  $E_{\mu,\nu}^c$ . La démonstration de la proposition 3.12 montre que nous pouvons transférer ce repère pour obtenir un repère  $(\xi_i^p)_i$   $i = 1, 2$  de  $M_{p\mu,p\nu}^{pc}$ .

**Proposition 3.15** (trace). *On définit un état tracial sur  $D$  par*

$$\tau(F) = \tau_0(\mathbb{E}_0(F)),$$

où  $\tau_0$  est la trace sur  $A = C(T^2)$  :

$$\tau_0(a) = \int_{T^2} a(x, y) dx dy$$

et  $\mathbb{E}_0$  est l'espérance conditionnelle du lemme 1.20.

*Démonstration.*  $\tau$  est positive comme composée de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}_0$  (voir le lemme 1.20 et [9], II.6.10) et de la trace positive  $\tau_0$  sur  $A$ .

Il est facile de calculer que  $\tau(1) = 1$ , pour prouver que  $\tau$  est un état. Vérifions qu'il s'agit bien d'une trace, en prenant  $F_1, F_2 \in D_0$  :

$$\begin{aligned} (F_1 \cdot F_2)(x, y, 0) &= \sum_q F_1(x, y, q) F_2(x - 2q\mu, y - 2q\nu, -q) \\ &= \sum_q F_1(x' + 2q\mu, y' + 2q\nu, q) F_2(x', y', -q) \\ &= \sum_{q'} F_1(x' - 2q'\mu, y' - 2q'\nu, -q') F_2(x', y', q') \\ &= (F_2 \cdot F_1)(x', y', 0) \end{aligned}$$

en posant successivement  $x' = x - 2q\mu$ ,  $y' = y - 2q\nu$  et  $q' = -q$ . Après intégration, nous avons bien  $\tau(F_1 \cdot F_2) = \tau(F_2 \cdot F_1)$ .  $\tau$  est donc une trace.  $\square$

### 3.1.3 Action du groupe de Heisenberg

**Définition 3.16** (groupe de Heisenberg). Nous appelons *groupe de Heisenberg* et notons  $H_3$  le sous-groupe de  $GL_3(\mathbb{R})$  des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la suite, nous noterons  $\mathfrak{H}_3$  l'algèbre de Lie associée à  $H_3$ .

Rappelons la remarque suivante de Rieffel ([45], p.539) :

**Remarque 3.17.** Si  $c \neq 0$ , on peut paramétrer  $H_3$  de façon à identifier  $H_3$  avec  $\mathbb{R}^3$  muni du produit :

$$(r', s', t')(r, s, t) = (r' + r, s' + s, t' + t + cs'r). \quad (3.8)$$

Notons que dans ce contexte, l'inverse de  $(r, s, t)$  est  $(-r, -s, -t + csr)$ .

**Remarque 3.18.** Si  $c = 0$ , il est clair que la formule (3.8) définit  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure additive habituelle.

**Proposition 3.19.** Reprenons l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de la proposition 3.7 et considérons la formule

$$(L_{(r,s,t)}F)(x, y, p) = e\left(-p(t + cs(x - r))\right)F(x - r, y - s, p),$$

où  $F \in D_0$ .

- Si  $c \neq 0$ , elle définit une représentation unitaire de  $H_3$  sur  $\mathcal{H}$ .
- Si  $c = 0$ , elle définit une représentation unitaire de  $T^3$  sur  $\mathcal{H}$ .

*Démonstration.* Il est clair que l'image d'un élément de  $D_0$  par  $L$  est toujours à support compact sur  $\mathbb{Z}$ . Vérifions maintenant que  $(L_{(r,s,t)}F)$  est bien dans  $\mathcal{H}$ . La condition de périodicité sur  $y$  est évidemment vérifiée. La condition sur  $x$  nécessite un calcul :

$$\begin{aligned} (L_{(r,s,t)}F)(x+1, y, p) &= e\left(-p(t + cs(x+1-r))\right)F(x+1-r, y-s, p) \\ &= e\left(-p(t + cs(x+1-r))\right)e(-cp(y-s-p\nu))F(x-r, y-s, p) \\ &= e(-cp(y-p\nu))e\left(-p(t + cs(x-r))\right)F(x-r, y-s, p) \\ &= e(-cp(y-p\nu))(L_{(r,s,t)}F)(x, y, p). \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que  $L_{(r,s,t)}$  conserve le produit scalaire, ce qui justifie que cet opérateur s'étend à  $\mathcal{H}$ .

Par ailleurs, les paramètres de  $L$  satisfont l'équation (3.8) :

$$\begin{aligned}
(L_{(r',s',t')}L_{(r,s,t)}F)(x,y,p) &= \\
&= L_{(r',s',t')}\left(e\left(-p(t+cs(x-r))\right)\right)F(x-r,y-s,p) \\
&= e\left(-p(t'+cs'(x-r'))\right)e\left(-p(t+cs(x-r'-r))\right)F(x-r-r',y-s-s',p) \\
&= e\left(-p(t+t'+cs'r+c(s+s')(x-r-r'))\right)F(x-(r+r'),y-(s+s'),p) \\
&= (L_{(r+r',s+s',t+t'+cs'r)}F)(x,y,p).
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que  $L$  est une représentation unitaire de  $H_3$  sur  $\mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned}
(F, L_{(r,s,t)}G) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{[0,1] \times S^1} \overline{F}(x,y,p) e\left(-p(t+cs(x-r))\right) G(x-r,y-s,p) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \overline{e(p(t+csx'))} \overline{F}(x'+r,y'+s,p) G(x',y',p),
\end{aligned}$$

avec un changement de variable évident. L'adjoint de  $L_{(r,s,t)}$  est donc  $L_{(-r,-s,-t+crs)}$ , ce qui prouve que la représentation est unitaire.

Enfin, pour  $c = 0$ , il est clair que  $L$  est une action de  $\mathbb{R}^3$ . Comme

$$L_{(1,0,0)} = L_{(0,1,0)} = L_{(0,0,1)} = \text{Id}_{\mathcal{H}},$$

on peut la relever en une action de  $T^3$ . □

**Définition 3.20.** On définit une action de  $H_3$  sur  $D$ , en posant :

$$\alpha_g(F) = L_g F L_g^*$$

Cette action est clairement compatible avec la structure d'algèbre de  $D$ , puisque  $L$  est une représentation unitaire. Explicitement,

$$\alpha_{(r,s,t)}(F)(x,y,p) = e\left(-p(t+cs(x-r))\right)F(x-r,y-s,p). \quad (3.9)$$

**Remarque 3.21.** Il est évident que  $\gamma_{-t} = \alpha_{(0,0,t)}$ , où  $\gamma$  est l'action de jauge. Il découle alors de (3.8) que  $\gamma$  commute avec  $\alpha$  – qui préserve donc la graduation de  $D$ .

En d'autres termes,  $\alpha$  se restreint en une action sur les modules  $M_{p\mu,p\nu}^{pc}$  qui sont inclus dans  $D_{\mu,\nu}^c$ .

**Proposition 3.22.** *L'action  $\alpha$  est continue point par point.*

*Démonstration.* Pour tout  $g$ ,  $\alpha_g$  est un automorphisme de la  $C^*$ -algèbre  $D$ , qui préserve donc la norme de  $D$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|\alpha_g(F) - F\| &\leq \|\alpha_g(F) - \alpha_g(F_0)\| + \|\alpha_g(F_0) - F_0\| + \|F_0 - F\| \\
&\leq 2\|F - F_0\| + \|\alpha_g(F_0) - F_0\|
\end{aligned}$$

et il nous suffit donc de montrer la continuité point par point sur une partie dense, comme  $D_0$ .



Dans le cas  $c = 0$ , les éléments homogènes de degré  $p$  sont des fonctions sur  $T^2$ . Prenons  $F_0 \in D^{(p)}$ ,

$$\begin{aligned} |L_{r,s,t}(F_0)(x, y) - F_0(x, y)| &= |e(-pt)F_0(x - r, y - s) - F_0(x, y)| \\ &\leq |(e(-pt) - 1)F_0(x - r, y - s)| + |F_0(x - r, y - s) - F_0(x, y)|. \end{aligned}$$

Comme  $F_0$  est une fonction continue sur le compact  $T^2$ , elle est uniformément continue. Ainsi pour  $(r, s)$  assez petit, le terme de droite est plus petit que  $\varepsilon$ . De même, en choisissant  $t$  proche de 0, on peut majorer le terme de droite par  $\varepsilon$ .

Au final,  $\alpha$  est continue point par point sur  $D^{(p)}$ . Tout élément de  $D_0$  étant une somme finie de  $D^{(p)}$ ,  $\alpha$  est continue point par point sur  $D_0$ .

Si  $c \neq 0$ , la remarque 3.14 fournit un repère pour  $M_{p\mu, p\nu}^{cp}$ , que nous notons  $(\xi_i^p)_i$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $\alpha$  est continue point par point sur  $A$  d'une part et sur les  $\xi_i^p$  d'autre part,  $\alpha$  est continue point par point sur  $D^{(p)} = M_{p\mu, p\nu}^{pc}$ . Ceci est suffisant, car tout élément de  $D_0$  s'écrit comme somme finie de  $D^{(p)}$ .

Il est facile de prouver comme ci-dessus que  $\alpha$  est continue sur  $A = M_{0,0}^0$ . Pour les  $\xi_i^p$ ,

$$\begin{aligned} |L_{r,s,t}(\xi_i^p)(x, y) - \xi_i^p(x, y)| &= |e(-p(t + cs(x - r)))\xi_i^p(x - r, y - s) - \xi_i^p(x, y)| \\ &\leq |e(-p(t + cs(x - r))) - 1| |\xi_i^p(x - r, y - s)| + |\xi_i^p(x - r, y - s) - \xi_i^p(x, y)|. \end{aligned}$$

Prenons  $i = 1$ . Les relations (3.4) montrent que  $(x, y) \mapsto |\xi_1^p(x - r, y - s) - \xi_1^p(x, y)|$  et  $(x, y) \mapsto |e(-p(t + cs(x - r))) - 1| |\xi_1^p(x - r, y - s)|$  sont des fonctions sur  $T^2$ . Il suffit donc de majorer la différence sur  $[-1/2, 1/2] \times S^1$ .

Supposons donc que  $-1/2 \leq x \leq 1/2$ . Par construction,  $\xi_1^p$  est à support compact dans  $] -1/2, 1/2[$ . Cette fonction est donc uniformément continue, et pour  $(r, s)$  assez petit, le terme de droite est majoré par  $\varepsilon$ .

Il est clair que  $x - r$  est borné pour  $x$  dans  $[-1/2, 1/2]$ . Nous pouvons donc prendre  $s$  et  $t$  suffisamment proches de 0 pour rendre le terme de gauche arbitrairement petit.

Ainsi, nous avons prouvé que  $(r, s, t) \mapsto \alpha_{r,s,t}(\xi_1^p)$  était continue. Un raisonnement similaire est possible sur  $\xi_2^p$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Proposition 3.23.** *La trace  $\tau$  est invariante sous l'action  $\alpha$  de  $H_3$ .*

*Démonstration.* Il s'agit d'un simple calcul. Si nous partons de  $F \in D_0$ ,

$$\tau(\alpha_{(r,s,t)}(F)) = \tau_0(F(x - r, y - s, 0)) = \int_{T^2} F(x - r, y - s, 0) dx dy = \tau(F),$$

car la trace  $\tau_0$  est invariante par translation.  $\square$

### 3.1.4 Cas $c = 0$

**Définition 3.24** (tores non-commutatifs). Le tore non-commutatif de dimension  $n$  associé à la matrice anti-symétrique  $n \times n$   $(\theta_{i,j})_{i,j}$  est la  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par  $n$  unitaires  $U_1, \dots, U_n$  qui satisfont les relations :

$$U_j U_i = e^{i2\pi\theta_{i,j}} U_i U_j.$$

Si  $\Theta = (\theta_{i,j})_{i,j}$  est la matrice anti-symétrique des relations, on note  $A_\Theta$  le tore non-commutatif associé.

Les tores non-commutatifs de dimension  $n$  sont munis d'une action canonique  $\beta$  de  $T^n$  donnée par

$$\beta_{(z_1, \dots, z_n)}(U_i) = z_i U_i.$$

**Proposition 3.25.** Dans le cas de  $c = 0$ , l'algèbre  $D_{\mu,\nu}^0$  est isomorphe au tore non-commutatif de dimension 3  $A_\Theta$  où

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix}.$$

L'action de  $T^3$  sur  $D_{\mu,\nu}^0$  s'identifie à l'action canonique de  $T^3$  sur  $A_\Theta$ .

*Démonstration.* Dans le cas  $c = 0$ ,  $M_{\mu,\nu}^0 \simeq A$  en tant que  $A$ -module à gauche. En particulier, la fonction constante 1 appartient à  $M_{\mu,\nu}^0$ . Nous noterons désormais  $U_3$  cet élément, pour le distinguer de l'unité de l'algèbre  $A$ . Tous les éléments de  $M_{\mu,\nu}^0$  sont de la forme  $aU_3$  pour  $a \in A$ . Notons  $U_1$  et  $U_2$  les éléments de l'algèbre  $A$  :

$$U_1(x, y) = e^{i2\pi x} \quad U_2(x, y) = e^{i2\pi y}.$$

Prouvons maintenant que si on dispose d'unitaires  $V_1, V_2$  et  $V_3$  dans une  $C^*$ -algèbre  $B$ , qui vérifient les relations :

$$V_1 V_2 = V_2 V_1 \quad V_3 V_1 = e^{i2\pi\mu} V_1 V_3 \quad V_3 V_2 = e^{i2\pi\nu} V_2 V_3$$

alors on peut définir un homomorphisme  $\Phi: D \rightarrow B$  en posant

$$\Phi(U_1) = V_1 \quad \Phi(U_2) = V_2 \quad \Phi(U_3) = V_3.$$

$\Phi$  induit clairement une représentation  $(\pi, \mathcal{T})$  du bimodule hilbertien  $M$ .  $\pi: A \rightarrow B$  est définie car  $U_1$  et  $U_2$  génèrent  $A$ . Nous définissons  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{T}(aU_3) = \pi(a)V_3$ . Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une représentation de bimodule hilbertien, il suffit de prouver les points (i) et (iv) de la définition 1.48 :

– pour (i) :

$$\mathcal{T}(aU_3)^* \mathcal{T}(a'U_3) = V_3^* \pi(a)^* \pi(a') V_3 = \pi(\langle a, a' \rangle_A)$$

car

$$V_3 \pi(U_1) V_3^* = V_3 V_1 V_3^* = e^{i2\pi\mu} V_1 V_3 V_3^* = \pi(e^{i2\pi\mu} U_1) \quad V_3 \pi(U_2) V_3^* = \pi(e^{i2\pi\nu} U_2)$$

qui suffit à prouver que  $V_3 \pi(a) V_3^* = \pi(\rho(a))$  où  $\rho(a)(x, y) = a(x + 2\mu, y + 2\nu)$ .

– pour (iv) :

$$\mathcal{T}(a'U_3)\mathcal{T}(aU_3)^* = \pi(a')V_3V_3^*\pi(a)^* = \pi(a'a^*) = \pi({}_A\langle a'U_3, aU_3 \rangle)$$

Nous avons bien une représentation du bimodule hilbertien, donc un homomorphisme  $\Phi: D \rightarrow B$ . Ainsi,  $D$  a la propriété universelle de  $A_\Theta$  et les deux algèbres sont isomorphes. Enfin, il est clair que l'action canonique de  $T^3$  sur  $A_\Theta$  correspond à l'action de  $T^3$  sur  $D_{\mu,\nu}^0$ .  $\square$

Les tores non-commutatifs de dimensions supérieures ont été déjà largement étudiés. Dans la suite de ce mémoire, nous supposons donc  $c \neq 0$ .

## 3.2 $K$ -théorie et cohomologie cyclique sur $\mathcal{D}$

### 3.2.1 Sous-algèbre lisse et dérivations

Suivant l'étude des produits croisés généralisés lisses que nous avons effectuée à la sous-section 1.3.4, nous utilisons les sous-algèbres lisses canoniques des QHM, considérées comme produits croisés généralisés munis d'une action du groupe de Lie de dimension finie  $H_3$ .

**Définition 3.26.** Nous appelons *QHM lisse* et nous notons  $\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c$  l'algèbre des éléments  $H_3$ -réguliers de  $D_{\mu,\nu}^c$ .

Dans la suite, nous utiliserons  $\mathcal{D}$  au lieu de  $\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c$  lorsqu'aucune confusion n'est possible. La proposition 3.22 nous assure que nous pouvons appliquer la proposition 1.57 et obtenir :

**Proposition 3.27.** *L'algèbre  $\mathcal{D}$  est une sous-algèbre lisse de  $D$ . Il s'agit en outre d'une algèbre de Fréchet.*

Une application directe de la définition 1.63 des générateurs infinitésimaux sur la relation (3.9) donne :

**Proposition 3.28.** *Les générateurs infinitésimaux de  $H_3$  équipé du paramétrage (3.8) :*

$$\partial_1(F)(x, y, p) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, p) \quad \partial_3(F)(x, y, p) = -i2\pi p F(x, y, p)$$

$$\partial_2(F)(x, y, p) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, p) - i2\pi c p x F(x, y, p).$$

Les  $\partial_i$  satisfont les relations

$$[\partial_1, \partial_2] = -c\partial_3 \quad [\partial_1, \partial_3] = 0 \quad [\partial_2, \partial_3] = 0. \quad (3.10)$$

Nous définissons une version lisse de  $M$  par :

**Notation 3.29.** Une algèbre  $D_{\mu,\nu}^c$  étant fixée, on note  $\mathcal{D}^{(p)}$  l'espace spectral de degré  $p$  de  $\mathcal{D}$ . Nous utilisons également la notation :

$$\mathcal{M}_{\mu,\nu}^{c,p} = \mathcal{D}^{(p)}.$$

Remarquons que  $\mathcal{M}_{\mu,\nu}^{c,p} \subseteq D^{(p)} = M_{p\mu,p\nu}^{pc}$ . Pour simplifier les notations,  $D_{\mu,\nu}^c$  étant fixé, nous écrirons  $\mathcal{M}^p$  au lieu de  $\mathcal{M}_{\mu,\nu}^{c,p}$ .

**Remarque 3.30.** La remarque 3.21 nous assure que  $\alpha$  préserve la graduation de  $D$ . En conséquence, les générateurs infinitésimaux  $\partial_i$  stabilisent les  $\mathcal{M}^p$ . En outre,  $\mathcal{M}^p$  peut se définir comme l'ensemble des éléments  $H_3$ -réguliers de  $M^{\otimes p} \subseteq D$ .

### 3.2.2 $K$ -théorie et représentants

La proposition 3.27 nous permet d'appliquer le théorème 1.58 et de prouver que l'algèbre  $\mathcal{D}$  possède la même  $K$ -théorie que  $D$ . Nous pouvons alors utiliser les résultats d'Abadie ([2], théorème 3.4) pour conclure que :

**Proposition 3.31.** *La  $K$ -théorie de  $\mathcal{D}$  est donnée par*

$$K_0(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \qquad K_1(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}^3. \quad (3.11)$$

Nous allons affiner la proposition ci-dessus en construisant des représentants explicites de la  $K$ -théorie impaire. Nous présenterons des représentants explicites de la  $K$ -théorie paire dans la section 3.3.

En guise de première étape de cette construction, prenons  $\xi \in M$  et  $a \in A$  dans le produit (3.5). Nous obtenons :

$$\forall \xi \in M, \forall a \in A, \qquad \xi a = \sigma(a)\xi. \quad (3.12)$$

Une conséquence de cette relation est :

**Lemme 3.32.** *Pour tous  $\xi, \zeta \in M_{\mu,\nu}^c \subseteq D_{\mu,\nu}^c$ ,  $\sigma(\xi^* \zeta) = \zeta \xi^*$ .*

*Démonstration.* En utilisant le repère  $\xi_1, \xi_2$  de la remarque 3.14, nous obtenons :

$$\sigma(\xi^* \zeta)(\xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^*) = \xi_1 \xi^* \zeta \xi_1^* + \xi_2 \xi^* \zeta \xi_2^* = \zeta \xi_1^* \xi_1 \xi^* + \zeta \xi_2^* \xi_2 \xi^* = \zeta \xi^*,$$

où nous avons utilisé la commutativité de  $A$ . □

**Remarque 3.33.** Comme pour tout  $a \in A$ , on a  $\sigma(a) = \alpha_{(2\mu, 2\nu, 0)}(a)$ , on peut étendre  $\sigma$  de  $A$  en un automorphisme de l'algèbre  $D$ , que nous noterons également  $\sigma$ , en posant  $\sigma = \alpha_{(2\mu, 2\nu, 0)}$ .

**Proposition 3.34.** *Soient*

$$M_+ = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ -\xi_2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_- = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(\xi_2)^* \\ 0 & \sigma(\xi_1)^* \end{pmatrix}.$$

*Ces éléments satisfont les relations :*

$$\begin{aligned} M_+ M_+^* &= P_+ = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* & -\xi_1 \xi_2^* \\ -\xi_2 \xi_1^* & \xi_2 \xi_2^* \end{pmatrix} & M_+^* M_+ &= Q_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_- M_-^* &= P_- = \begin{pmatrix} \sigma(\xi_2^* \xi_2) & \sigma(\xi_2^* \xi_1) \\ \sigma(\xi_1^* \xi_2) & \sigma(\xi_1^* \xi_1) \end{pmatrix} & M_-^* M_- &= Q_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_\pm &= P_\pm^2 = P_\pm^* & P_+ + P_- &= I_2 & Q_\pm &= Q_\pm^2 = Q_\pm^* & Q_+ + Q_- &= I_2 \\ P_\pm M_\pm &= M_\pm & M_\pm Q_\pm &= M_\pm & M_\pm M_\mp^* &= 0 & M_\pm^* M_\mp &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $U_3 = M_+ + M_-$  est un unitaire.

*Démonstration.* Les quatre premières relations se prouvent par calcul direct. Les relations entre  $Q_\pm$  sont évidentes. Les  $P_\pm$  sont clairement auto-adjoints. En utilisant (3.3), il est facile de calculer que  $P_+^2 = P_+$ .

Montrons  $P_+ + P_- = I_2$ , ce qui prouvera les dernières relations entre  $P_\pm$  :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* & -\xi_1 \xi_2^* \\ -\xi_2 \xi_1^* & \xi_2 \xi_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma(\xi_2^* \xi_2) & \sigma(\xi_2^* \xi_1) \\ \sigma(\xi_1^* \xi_2) & \sigma(\xi_1^* \xi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* & -\xi_1 \xi_2^* + \xi_1 \xi_2^* \\ -\xi_2 \xi_1^* + \xi_2 \xi_1^* & \xi_2 \xi_2^* + \xi_1 \xi_1^* \end{pmatrix} = I_2,$$

en utilisant systématiquement le lemme 3.32. En outre, le développement

$$\begin{aligned} (M_\pm Q_\pm - M_\pm)^* (M_\pm Q_\pm - M_\pm) &= (Q_\pm M_\pm^* - M_\pm^*) (M_\pm Q_\pm - M_\pm) = \\ &= Q_\pm Q_\pm Q_\pm - Q_\pm^2 - Q_\pm^2 - Q_\pm = 0 \end{aligned}$$

nous assure que  $M_\pm Q_\pm = M_\pm$ . Par ailleurs,  $P_\pm M_\pm = M_\pm M_\pm^* M_\pm = M_\pm Q_\pm = M_\pm$ , et

$$M_\pm M_\mp^* = M_\pm Q_\pm Q_\mp M_\mp^* = 0 \quad M_\pm^* M_\mp = M_\pm^* P_\pm P_\mp M_\mp = 0.$$

□

Nous pouvons maintenant donner des représentants explicites de  $K_1(\mathcal{D})$  :

**Corollaire 3.35.** *Il existe trois classes dans  $K_1(\mathcal{D})$  données par :*

$$U_1(p, x, y) = \delta_{0,p} e(x) \quad U_2(p, x, y) = \delta_{0,p} e(y) \quad U_3 = M_+ + M_-.$$

Nous calculerons les images de ces éléments par une certaine application de l'indice dans la proposition 3.79.

*Démonstration.* Les deux premiers unitaires proviennent de l'inclusion  $A \hookrightarrow D_{\mu,\nu}^c$ . Le fait que  $U_3$  est un unitaire est une conséquence directe des propriétés de la proposition 3.34. □

Notons que pour l'instant, nous n'avons pas prouvé que les classes de  $K$ -théorie des  $U_i$  étaient deux à deux distinctes. Cette propriété est une conséquence du tableau (3.18).

### 3.2.3 Cocycles cycliques

La proposition 3.23 montre que la trace  $\tau$  est invariante sous l'action du groupe de Lie  $H_3$ . La proposition 1.65 nous permet donc de générer des cocycles cycliques à partir d'éléments de  $\Lambda^* \mathfrak{H}_3$  qui vérifient (1.3).

**Proposition 3.36.** *Les 7 formes multilinéaires suivantes sont des cocycles cycliques sur  $\mathcal{D}$  :*

- Degré 0 : trace  $\tau$ .
- Degré 1 : les  $\varphi_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  où

$$\varphi_i(a_0, a_1) = \tau(a_0 \partial_i(a_1)).$$

- Degré 2 :  $\varphi_{1,3}$  et  $\varphi_{2,3}$  où

$$\varphi_{i,3}(a_0, a_1, a_2) = \tau(a_0(\partial_i(a_1)\partial_3(a_2) - \partial_3(a_1)\partial_i(a_2))).$$

- Degré 3 :  $\varphi_{1,2,3}$  donné par

$$\varphi_{1,2,3}(a_0, a_1, a_2, a_3) = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \varepsilon(\sigma) \tau(a_0 \partial_{\sigma(1)} a_1 \partial_{\sigma(2)} a_2 \partial_{\sigma(3)} a_3).$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une application directe de la proposition 1.65.

- Degré 0 : il n'y a rien à vérifier car  $\tau$  est une trace (proposition 3.15)
- Degré 1 : la condition (1.3) est vide : dans ce cadre, toute dérivation génère un cocycle cyclique.
- Degré 2 : les relations de commutations

$$[\partial_1, \partial_3] = 0 \qquad [\partial_2, \partial_3] = 0$$

montrent que  $\xi_1 \wedge \xi_3$  et  $\xi_2 \wedge \xi_3$  vérifient la condition (1.3).

- Degré 3 : partons de  $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3$ . La condition (1.3) s'écrit alors :

$$(-1)^3 \underbrace{[\xi_1, \xi_2]}_{=-c\partial_3} \wedge \xi_3 + (-1)^4 \underbrace{[\xi_1, \xi_3]}_{=0} \wedge \xi_2 + (-1)^5 \underbrace{[\xi_2, \xi_3]}_{=0} \wedge \xi_1 = 0$$

où nous avons utilisé les relations de commutations, dont  $[\xi_1, \xi_2] = -c\partial_3$ .

□

Pour prouver que ces cocycles cycliques sont non triviaux et deux à deux distincts, nous utilisons la cohomologie de Hochschild (voir par exemple le chapitre 1 de [37]) :

**Définition 3.37.** La *cohomologie de Hochschild*  $HH^*(\mathcal{A})$  d'une algèbre  $\mathcal{A}$  est la cohomologie du complexe  $(C^n, b)$  où  $C^n$  est l'ensemble des formes  $(n+1)$ -linéaires  $\phi$  sur  $\mathcal{A}$  (sans condition de cyclicité!) et la différentielle  $b$  est donnée par :

$$\begin{aligned} b\phi(a^0, \dots, a^n, a^{n+1}) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \phi(a^0, \dots, a^j a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \phi(a^{n+1} a^0, \dots, a^n). \end{aligned}$$

Les cochaines fermées au sens ci-dessus sont appelés des *cocycles de Hochschild*.

Dans le cas d'une algèbre localement convexe, on demande en plus que les formes multi-linéaires soient *continues*.

Au vu de la définition 1.59 et de celle-ci dessus, il est clair que les cocycles cycliques sont également des cocycles de Hochschild. Les liens entre cohomologies cyclique et de Hochschild sont bien connus. Ils sont formalisés par le triangle exact SBI (voir [13], théorème 37), qui prouve en particulier que si deux cocycles cycliques sont distincts dans  $HH^*(\mathcal{A})$ , alors ils sont distincts dans  $HC^*(\mathcal{A})$ .

La cohomologie de Hochschild a une théorie duale, l'*homologie de Hochschild*, notée  $HH_*(\mathcal{A})$ . Les chaines de  $HH_*(\mathcal{A})$ , appelées *cycles de Hochschild*, sont des éléments des produits tensoriels itérés  $\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}$  qui satisfont une condition duale de  $b\phi = 0$ . L'évaluation « naïve » d'un cocycle de Hochschild sur un cycle de Hochschild définit un appariement entre  $HH^n(\mathcal{A})$  et  $HH_n(\mathcal{A})$  (voir [37], 1.1 et 1.5).

En utilisant cet appariement, nous montrons que les cocycles cycliques sont deux à deux distincts en cohomologie de Hochschild :

**Proposition 3.38.** *Les cycles de Hochschild  $(c_I)$  définis ci-dessous sont « duaux » aux cocycles de la proposition 3.36, au sens où*

$$\langle c_k, \varphi_i \rangle = \delta_{k,i} k_i \quad \langle c_{k,l}, \varphi_{i,j} \rangle = \delta_{i,k} \delta_{j,l} k_{i,j} \quad \langle c_{1,2,3}, \varphi_{1,2,3} \rangle = k_{1,2,3},$$

pour des constantes non nulles  $k_I \in \mathbb{C}$ . Les expressions de ces cycles sont :

- Degré 1 :  $c_1 = U_1^* \otimes U_1$ ,  $c_2 = U_2^* \otimes U_2$  et  $c_3 = \xi_1^* \otimes \xi_1 + \xi_2^* \otimes \xi_2$  ;
- Degré 2 : « anti-symétrisé »  $c_{j,3}$  de  $\sum_p \xi_p^* U_j^* \otimes U_j \otimes \xi_p$  :

$$c_{j,3} = \sum_{p=1}^2 \xi_p^* U_j^* \otimes U_j \otimes \xi_p - U_j^* \xi_p^* \otimes \xi_p \otimes U_j$$

- Degré 3 : en écrivant  $U_{p,j}$  pour  $U_j$  si  $j = 1, 2$  et pour  $\xi_p$  si  $j = 3$ ,

$$c_{1,2,3} = \sum_{p=1}^2 \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \varepsilon(\sigma) U_{p,\sigma(3)}^* U_{p,\sigma(2)}^* U_{p,\sigma(1)}^* \otimes U_{p,\sigma(1)} \otimes U_{p,\sigma(2)} \otimes U_{p,\sigma(3)},$$

**Remarque 3.39.** Le cycle de Hochschild  $c_{1,2,3}$  est l'analogue d'une forme fondamentale pour  $\mathcal{D}$ .

**Remarque 3.40.** Les cocycles cycliques sont des cocycles de Hochschild ce qui permet de définir les appariements  $\langle c_I, \varphi_K \rangle$  avec les cycles de Hochschild. Par ailleurs, si  $\varphi_{1,2}$  (avec une expression évidente) n'est pas un cocycle cyclique, il s'agit d'un cocycle de Hochschild bien défini et son « dual » est  $c_{1,2} = U_1^* U_2^* \otimes U_2 \otimes U_1 - U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2$ .

**Remarque 3.41.** Ces cycles ressemblent beaucoup à ceux qu'on obtiendrait grâce à des produits de mélange (*shuffle products*) des  $c_i$ . Cependant, dans notre cas ces produits de mélange ne sont pas définis, puisque  $\mathcal{D}$  n'est pas commutative.

*Démonstration.* Il est clair que  $c_1$  et  $c_2$  sont des cycles de Hochschild. La fermeture de  $c_3$  est une conséquence évidente de (3.3).

Pour montrer que  $c_{i,3}$  et  $c_{1,2,3}$  sont des cycles de Hochschild, nous faisons essentiellement une adaptation de la démonstration du lemme 12.15 de [47]. Nous donnons le détail de ces calculs dans le cas de  $c_{1,2,3}$  dans l'annexe A.2.1. Nous ne faisons pas les calculs pour  $c_{i,3}$ , dans la mesure où le principe est le même et les calculs sont plus simples que pour  $c_{1,2,3}$ .

De même, les calculs de l'appariement de  $c_{1,2,3}$  avec  $\varphi_{1,2,3}$  sont faits dans l'annexe A.2.2 et ceux pour les  $c_{i,3}$  sont tout-à-fait analogues.  $\square$

### 3.3 Accouplements pairs

#### 3.3.1 Définition et résultats

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre localement convexe, si  $a_i \otimes b_i \in \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ , nous posons :

$$(\phi \# \text{Tr})(a^0 \otimes b^0, \dots, a^n \otimes b^n) = \phi(a^0, \dots, a^n) \text{Tr}(b^0 \dots b^n) \quad (3.13)$$

Nous suivons la définition et les normalisations de [15] (III.3 proposition 2) :

**Définition 3.42** (accouplements de Chern-Connes). La formule suivante définit des accouplements bilinéaires entre  $K_0(\mathcal{A})$  et  $HC^{2m}(\mathcal{A})$  :

$$\langle [e], [\phi] \rangle = \frac{1}{m!} (\phi \# \text{Tr})(e, \dots, e),$$

où  $[e] \in K_0(\mathcal{A})$  et  $\phi \in HC^{2m}(\mathcal{A})$ .

En outre, il existe une *application de périodicité*  $S: HC^n(\mathcal{A}) \rightarrow HC^{n+2}(\mathcal{A})$  qui nous permet de définir les groupes  $HP^*(\mathcal{A})$  – voir [47], 10.1, définition 10.5 p.445 :

**Définition 3.43** (cohomologie cyclique périodique). La *cohomologie cyclique périodique* est formée des deux limites inductives :

$$HP^0(\mathcal{A}) = \varinjlim HC^{2k}(\mathcal{A}) \quad HP^1(\mathcal{A}) = \varinjlim HC^{2k+1}(\mathcal{A}).$$

Les appariements ci-dessus sont en fait définis sur  $HP^0(\mathcal{A})$  car ils vérifient la relation de compatibilité  $\langle [e], [S\phi] \rangle = \langle [e], [\phi] \rangle$ .

**Remarque 3.44.** Une conséquence des appariements de la proposition 3.38 et du triangle SBI est qu'aucun des cocycles cycliques de la proposition 3.36 n'est dans l'image  $\mathfrak{I}S$ .

Avant de continuer, nous devons introduire des modules (projectifs de type fini) sur  $D$ , que nous étudierons plus en détail dans la sous-section 3.3.2. Les modules projectifs de type fini sur les  $D_{\mu,\nu}^c$  ont été étudiés par Abadie dans [1] et [2]. Rappelons les résultats qui figurent dans [1] (pp. 2-3) :



**Théorème 3.45** (Abadie, 1992). *Quels que soient  $c \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  tels que  $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$ , il existe une  $C^*$ -algèbre unifère  $E_{\mu,\nu}^c$  qui est Morita équivalente à  $D_{\mu,\nu}^c$ .*

*Cette équivalence de Morita est réalisée par le  $E_{\mu,\nu}^c$ - $D_{\mu,\nu}^c$ -bimodule hilbertien  $N_{\mu,\nu}^c$  obtenu par complétion de  $C_c(\mathbb{R} \times S^1)$  pour le produit scalaire à valeurs dans  $D_{\mu,\nu}^c$  :*

$$\langle f, g \rangle_{D_{\mu,\nu}^c}(x, y, p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(cnp(y - p\nu)) \overline{f(x + n, y)} g(x - 2p\mu + n, y - 2p\nu),$$

*l'action de  $D_{\mu,\nu}^c$  à droite étant donnée par*

$$(f \cdot F)(x, y) = \sum_q f(x - 2q\mu, y - 2q\nu) F(x - 2q\mu, y - 2q\nu, -q).$$

*Le module  $N_{\mu,\nu}^c$  est projectif de type fini et  $\text{Tr}(\text{Id}_{N_{\mu,\nu}^c}) = 2\mu$ .*

Dans la suite, nous noterons bien sûr  $N$  au lieu de  $N_{\mu,\nu}^c$ .

**Remarque 3.46.** Notre module  $N$  est en fait le module opposé du  $X$  donné dans [1], p.2.

Nous verrons un peu plus loin que nous pouvons définir

- d'une part un autre module  $N^\dagger$  à partir de  $N$  et d'un isomorphisme entre QHM (définition 3.53),
- et d'autre part des versions lisses  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}^\dagger$  de  $N$  et  $N^\dagger$  (définitions 3.49 et 3.56).

**Théorème 3.47.** *Si  $\mu$  et  $\nu$  sont non nuls, on peut définir des modules projectifs de type fini  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}^\dagger$  sur  $\mathcal{D}$ , et les valeurs des appariements de ces modules sont données par le tableau suivant :*

	$\tau$	$\varphi_{1,3}$	$\varphi_{2,3}$
$[\mathcal{D}]$	1	0	0
$[\mathcal{N}]$	$2\mu$	$-i2\pi$	0
$[\mathcal{N}^\dagger]$	$-2\nu$	0	$i2\pi$

(3.14)

Si  $\mu$  ou  $\nu$  est nul, alors les modules  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}^\dagger$  ne sont pas définis, et nous devons utiliser l'isomorphisme entre  $\mathcal{D}_{\mu+1,\nu+1}^c$  et  $\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c$  que ABADIE a prouvé dans l'article [1] pour conclure. Ce phénomène peut paraître surprenant, mais il est parfaitement analogue de ce qui se passe avec les « modules de Schwartz » pour le tore non-commutatif – voir [13] partie II, définition au-dessus du lemme 54. Pour plus de détails, voir la remarque 3.63.

Dans l'article [3], ABADIE a calculé les images du  $K_0(D)$  par les traces sur  $D$ , c'est-à-dire la première colonne de ce tableau.

### 3.3.2 Module $N$ sur $D$ pour $\mu \neq 0$ et $\nu \neq 0$

**Proposition 3.48.** *Si  $\mu \neq 0$ , l'action  $\beta$  de  $H_3$  sur  $N_D$  donnée par*

$$\beta_{(r,s,t)}(f)(x, y) = e^{ix \frac{\pi}{\mu} \left( t + sc \left( x/2 - r - \mu q \right) \right)} f(x - r, y - s)$$

*vérifie le point (i) de la définition 1.67.*

*Démonstration.* Notons d'une part que

$$\beta_{(r,s,t)}(f \cdot F)(x, y) = e^{ix \frac{\pi}{\mu} (t + sc(x/2 - r - \mu q))} \sum_q f(x - r - 2q\mu, y - s - 2q\nu) F(x - r - 2q\mu, y - s - 2q\nu, -q),$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} (\beta_{(r,s,t)}(f) \cdot \alpha_{(r,s,t)}(F))(x, y) &= \sum_q e^{i(x-2q\mu) \frac{\pi}{\mu} \left( t + sc\left(\frac{(x-2q\mu)}{2} - r - \mu q\right) \right)} f(x - r - 2q\mu, y - s - 2q\nu) \\ &\quad \times e\left(q(t + cs(x - r - 2q\nu))\right) F(x - r - 2q\mu, y - s - 2q\nu, -q). \end{aligned}$$

Étudions juste le facteur de phase de cette dernière expression en laissant de côté le  $e^i$  :

$$\begin{aligned} (x - 2q\mu) \frac{\pi}{\mu} \left( t + sc\left(\frac{(x-2q\mu)}{2} - r - \mu q\right) \right) + 2\pi q(t + cs(x - r - 2q\nu)) &= \\ = t \left( \frac{\pi}{\mu} (x - 2q\mu) + 2\pi q \right) + sc \left( (x - 2q\mu) \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{(x-2q\mu)}{2} - r - \mu q \right) + 2\pi q(x - r - 2q\mu) \right) &= \\ = t \frac{\pi}{\mu} x - rcs \left( \frac{\pi}{\mu} (x - 2q\mu) + 2\pi q \right) + sc(x - 2q\mu) \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{(x-2q\mu)}{2} - \mu q + 2q\mu \right) &= \\ = t \frac{\pi}{\mu} x - csr \frac{\pi}{\mu} x + cs(x - 2q\mu) \frac{\pi}{\mu} x/2 = x \frac{\pi}{\mu} (t + cs(x/2 - r - q\mu)). \end{aligned}$$

Si nous réintégrons cette propriété dans l'expression de  $\beta_{(r,s,t)}(f) \cdot \alpha_{(r,s,t)}(F)$  :

$$\begin{aligned} (\beta_{(r,s,t)}(f) \cdot \alpha_{(r,s,t)}(F))(x, y) &= \\ = \sum_q e^{ix \frac{\pi}{\mu} (t + cs(x/2 - r - q\mu))} f(x - r - 2q\mu, y - s - 2q\nu) F(x - r - 2q\mu, y - s - 2q\nu, -q) &= \\ = \beta_{(r,s,t)}(f \cdot F)(x, y). \end{aligned}$$

□

### 3.3.3 Connexions et appariements pour $\mathcal{N}$

**Définition 3.49.** On note  $\mathcal{N}$  le module des éléments  $H_3$ -réguliers de  $N$  pour l'action  $\beta$ . D'après la proposition 1.68,  $\mathcal{N}$  est projectif de type fini sur  $\mathcal{D}$ .

La proposition 1.69 nous permet de calculer des appariements en utilisant des connexions. Nous disposons d'une action de module sur  $N$ , il est donc facile de construire des connexions sur  $\mathcal{N}$  (voir la proposition 1.68).

**Proposition 3.50.** *On définit des connexions sur  $\mathcal{N}$  associées à  $\varphi_{1,3}$  et  $\varphi_{2,3}$  respectivement, en posant :*

$$(\nabla f)(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{i\pi}{\mu}xf(x, y)dp$$

et

$$(\nabla f)(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + i\pi cx\left(\frac{x}{2\mu} - q\right)f\right)(x, y)dy + \frac{i\pi}{\mu}xf(x, y)dp.$$

*Démonstration.* C'est une application évidente des propositions 1.68 et 3.48.  $\square$

**Proposition 3.51.** *Si  $\mu \neq 0$ , les valeurs des appariements pour  $\mathcal{N}$  sont :*

$$\langle [\mathcal{N}], [\varphi_{1,3}] \rangle = -i2\pi \quad \langle [\mathcal{N}], [\varphi_{2,3}] \rangle = 0.$$

*Démonstration.* Commençons par le cas de  $\varphi_{1,3}$ , en calculant  $\nabla^2 f$  :

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla f) &= \nabla \left( -\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{i\pi}{\mu}xfdp \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx - \frac{i\pi}{\mu}x\frac{\partial f}{\partial x}dp \right)dx + \frac{i\pi}{\mu} \left( -\left(f + x\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{i\pi}{\mu}x^2f dp \right)dp \\ &= -i\frac{\pi}{\mu}f \otimes dx \wedge dp \end{aligned}$$

soit  $\nabla^2 = -i\frac{\pi}{\mu} \text{Id}_{\mathcal{N}} \otimes dx \wedge dp$ .

Le calcul de trace d'Abadie (théorème 3.45) prouve que pour tout idempotent  $p$  tel que  $pD^n \simeq N$ ,

$$\tau(p) = 2\mu,$$

où  $\tau$  est étendue de façon évidente à  $M_n(D)$ . Comme  $\mathcal{D}$  est une sous-algèbre lisse de  $D$ , nous pouvons prendre un élément de  $K$ -théorie dans  $\mathcal{D}$  qui correspond à  $p$  (théorème 1.58) et comme la trace ne dépend que de la classe dans  $K_0(D)$ ,

$$\langle [\mathcal{N}], \varphi_{1,3} \rangle = -i2\pi.$$

Pour  $\varphi_{2,3}$ , il est clair que les deux termes de la connexion commutent, ce qui prouve que  $\nabla^2 = 0$ , et donc

$$\langle [\mathcal{N}], \varphi_{2,3} \rangle = 0.$$

$\square$

### 3.3.4 Connexions et appariements pour $\mathcal{N}^\dagger$

Nous allons définir un second module  $N^\dagger$  sur  $D$  en utilisant un isomorphisme entre deux  $D_{\mu,\nu}^c$ .

**Proposition 3.52.** *Il existe un isomorphisme  $\Phi: D_{\mu,\nu}^c \rightarrow D_{\nu,\mu}^c$ , induit par la représentation du bimodule hilbertien  $M_{\mu,\nu}^c$  sur  $D_{\nu,\mu}^c$  :*

$$\pi(a)(x, y, p) = \delta_{0,p} a(-y, -x) \quad \mathcal{T}(\xi)(x, y, p) = \delta_{-1,p} e^{i2\pi c(y+\mu)(x+\nu)} \xi(-y, -x).$$

En outre, cet isomorphisme entrelace les représentations de  $H_3$ . Plus précisément :

$$\Phi(\alpha_{r,s,t}(F)) = \alpha'_{-s,-r,-t-c(\mu s+r\nu-rs)}(\Phi(F)) \quad (3.15)$$

où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont les actions de  $H_3$  sur  $D_{\mu,\nu}^c$  et  $D_{\nu,\mu}^c$ , respectivement. Cette relation prouve que les éléments lisses de  $D_{\mu,\nu}^c$  sont envoyés sur les éléments lisses de  $D_{\nu,\mu}^c$  et réciproquement.

L'existence d'un tel isomorphisme entre  $D_{\mu,\nu}^c$  et  $D_{\nu,\mu}^c$  est assuré par [7], théorème 2.2. Cependant, nous donnons ici une expression *explicite* ainsi qu'une relation d'entrelacement.

*Démonstration.* Notons qu'en suivant la définition 3.8,  $D_{\nu,\mu}^c$  admet pour sous-algèbre dense l'algèbre  $D_{\nu,\mu,0}^c$  des fonctions continues de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$ , à support compact sur  $\mathbb{Z}$ , qui vérifient

$$F(x+1, y, p) = e(-cp(y-p\mu))F(x, y, p) \quad F(x, y+1, p) = F(x, y, p).$$

Le produit est

$$(F_1 \cdot F_2)(x, y, p) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} F_1(x, y, q) F_2(x - q2\nu, y - q2\mu, p - q).$$

L'involution est

$$F^*(x, y, p) = \overline{F(x - 2p\nu, y - 2p\mu, -p)}$$

Vérifions que  $\mathcal{T}(\xi)$  est dans la composante de degré  $p = -1$  de  $D_{\nu,\mu,0}^c$  :

$$\mathcal{T}(\xi)(x+1, y, p) = \delta_{-1,p} e^{i2\pi c(y+\mu)(x+1+\nu)} \xi(-y, -x-1) = \delta_{-1,p} e^{i2\pi c(y+\mu)} \mathcal{T}(\xi)(x, y)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi)(x, y+1, p) &= \delta_{-1,p} e^{i2\pi c(y+1+\mu)(x+\nu)} \xi(-y-1, -x) = \\ &= \delta_{-1,p} e^{i2\pi c(x+\nu)} e^{i2\pi c(y+\mu)(x+\nu)} e^{i2\pi c(-x-\nu)} \xi(-y, -x) = \mathcal{T}(\xi)(x, y, p). \end{aligned}$$

Nous savons que pour prouver qu'il s'agit d'une représentation de bimodule, il suffit de prouver les points (i) et (iv) de la définition 1.48.

Pour le point (i) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi)^* \mathcal{T}(\zeta)(x, y, 0) &= \\ &= e^{-i2\pi c(y-\mu)(x-\nu)} \overline{\xi(-y+2\mu, -x+2\nu)} e^{i2\pi c(y-\mu)(x-\nu)} \zeta(-y+2\mu, -x+2\nu) = \\ &= \overline{\xi(-y+2\mu, -x+2\nu)} \zeta(-y+2\mu, -x+2\nu) = \pi(\langle \xi, \zeta \rangle_A)(x, y). \end{aligned}$$

Pour le point (iv) :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\zeta)\mathcal{T}(\xi)^*(x, y, 0) &= e^{i2\pi c(y+\mu)(x+\nu)}\zeta(-y, -x)e^{-i2\pi c(y+\mu)(x+\nu)}\overline{\xi(-y, -x)} = \\ &= \zeta(-y, -x)\overline{\xi(-y, -x)} = \pi(A\langle\zeta, \xi\rangle)(x, y).\end{aligned}$$

Il existe donc un homomorphisme de  $D_{\mu, \nu}^c$  vers  $D_{\nu, \mu}^c$ .

Pour prouver l'entrelacement : comme  $\pi(A)$  et  $\mathcal{T}(M_{\mu, \nu}^c)$  engendrent l'algèbre, il suffit de vérifier l'entrelacement (3.15) sur ces deux ensembles. Notons  $\alpha'$  l'action de  $H_3$  sur  $D_{\nu, \mu}^c$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\pi(\alpha_{r, s, t}(a))(x, y) &= \pi(a(x-r, y-s)) = a(-y-r, -x-s) = \\ &= \alpha'_{-s, -r, -t-c(\mu s+r\nu-rs)}(\pi(a))(x, y)\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\alpha_{r, s, t}\xi)(x, y, p) &= \mathcal{T}\left(e\left(-\left(t+cs(x-r)\right)\right)\xi(x-r, y-s)\right) \\ &= \delta_{-1, p}e^{i2\pi c(y+\mu)(x+\nu)}e\left(-\left(t+cs(-y-r)\right)\right)\xi(-y-r, -x-s) \\ &= \delta_{-1, p}e\left(-t+c(y+\mu+r)(x+\nu+s)-cr(x+\nu+s)-c(y+\mu)s+cs(y+r)\right) \\ &\quad \times \xi(-y-r, -x-s) \\ &= \delta_{-1, p}e\left(-t+c(y+\mu+r)(x+\nu+s)-cr(x+\nu)-c\mu s\right)\xi(-y-r, -x-s) \\ &= \delta_{-1, p}e\left(-t-c(\mu s+r\nu-rs)-cr(x+s)\right)e^{i2\pi c(y+\mu+r)(x+\nu+s)}\xi(-y-r, -x-s) \\ &= (\alpha'_{-s, -r, -t-c(\mu s+r\nu-rs)}\mathcal{T}(\xi))(x, y, p).\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'équation (3.9) pour  $p = -1$  et  $D_{\nu, \mu}^c$ . Cet entrelacement permet de prouver l'isomorphisme en utilisant le théorème 1.53 d'invariance de jauge : il est clair que  $\pi$  est injective et que  $\Phi$  entrelace les actions de jauge des deux algèbres, la représentation induit donc un isomorphisme.  $\square$

**Définition 3.53** (module  $N_{\mu, \nu}^{\dagger c}$ ). On définit le module  $N_{\mu, \nu}^{\dagger c}$  sur  $D_{\mu, \nu}^c$  comme le module induit à partir de  $N_{\nu, \mu}^c$  grâce à  $\Phi$ . Ce module existe dès que  $\nu \neq 0$ . Explicitement, l'action de  $D_{\mu, \nu}^c$  est :

$$f \cdot F = f \Phi(F).$$

**Remarque 3.54.** Si  $P'$  est un projecteur de  $M_n(D_{\nu, \mu}^c)$  associé à  $N_{\nu, \mu}^c$ , alors  $P = \Phi^{-1}(P')$  est un projecteur de  $M_n(D_{\mu, \nu}^c)$  associé à  $N_{\mu, \nu}^{\dagger c}$ .

**Lemme 3.55.** Les cocycles cycliques induits sur  $\mathcal{D}_{\mu, \nu}^c$  à partir des cocycles cycliques  $\varphi'_{i, 3}$  sur  $\mathcal{D}_{\nu, \mu}^c$  valent :

$$\Phi^* \varphi'_{1, 3} = -\varphi_{2, 3} \qquad \Phi^* \varphi'_{2, 3} = -\varphi_{1, 3}.$$

*Démonstration.* Commençons par lier les dérivations  $\partial'_i$  de  $\mathcal{D}_{\nu,\mu}^c$  aux  $\partial_i$  de  $\mathcal{D}_{\mu,\nu}^c$ . Si on dérive la relation (3.15) suivant  $r, s$  et  $t$  successivement, puis qu'on réarrange le résultat, on obtient

$$\partial'_1 \circ \Phi = \Phi \circ (c\mu\partial_3 - \partial_2) \quad \partial'_2 \circ \Phi = \Phi \circ (c\nu\partial_3 - \partial_1) \quad \partial'_3 \circ \Phi = -\Phi \circ \partial_3.$$

Par ailleurs, les traces  $\tau_{\mu,\nu}^c$  et  $\tau_{\nu,\mu}^c$  sont liées par

$$\tau_{\nu,\mu}^c(\Phi(F)) = \tau_{\mu,\nu}^c(F).$$

En conséquence, les cocycles induits s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi^* \varphi'_{i,3}(a_0, a_1, a_2) &= \tau\left(\Phi(a_0)[\partial'_i(\Phi(a_1))\partial'_3(\Phi(a_2)) - \partial'_3(\Phi(a_1))\partial'_i(\Phi(a_2))]\right) = \\ &= \tau\left(\Phi\left[a_0((k_i\partial_3 - \partial_j)(a_1)\partial_3(a_2) - \partial_3(a_1)(k_i\partial_3 - \partial_j)(a_2))\right]\right) = \\ &= -\varphi_{j,3}(a_0, a_1, a_2), \end{aligned}$$

où  $(i, j)$  est une permutation de  $(1, 2)$  et  $k_1 = c\mu$ ,  $k_2 = c\nu$ .  $\square$

Il est simple mais fastidieux de vérifier que  $(r, s, t) \mapsto \alpha'_{-s, -r, -t-c(\mu s + r\nu - rs)}$  est une représentation de  $H_3$  sur  $D_{\nu,\mu}^c$ . Il découle alors des propositions 3.48, 3.52 et définition 3.53 que  $N^\dagger$  peut être équipé d'une action  $(\alpha, \beta^\dagger)$ , laquelle vérifie le point (i) de la définition 1.67 et est définie par :

$$\beta_{(r,s,t)}^\dagger(f) = \beta'_{-s, -r, -t-c(\mu s + r\nu - rs)}(f),$$

où  $\beta'$  est l'action  $H_3 \curvearrowright N_{\nu,\mu}^c$  donnée dans la proposition 3.48. Ceci justifie la

**Définition 3.56.** Nous notons  $\mathcal{N}^\dagger$  le module à droite sur  $\mathcal{D}$  des éléments de  $N^\dagger$  qui sont réguliers sous l'action  $\beta^\dagger$  de  $H_3$ . La proposition 1.68 montre que  $\mathcal{N}^\dagger$  est un module projectif de type fini sur  $\mathcal{D}$ .

**Proposition 3.57.** Si  $\nu \neq 0$ , les valeurs des appariements pour  $\mathcal{N}^\dagger$  sont :

$$\langle [\mathcal{N}_{\mu,\nu}^{\dagger c}], \varphi_{1,3} \rangle = 0 \quad \langle [\mathcal{N}_{\mu,\nu}^{\dagger c}], \varphi_{2,3} \rangle = i2\pi.$$

*Démonstration.* Au vu de la remarque 3.54, de la définition de  $\Phi^* \varphi_{i,3}$  et du lemme précédent, il est clair que si  $(i, j)$  est une permutation de  $(1, 2)$  :

$$\langle [\mathcal{N}_{\mu,\nu}^{\dagger c}], \varphi_{j,3} \rangle = -\langle [\mathcal{N}_{\mu,\nu}^{\dagger c}], \Phi^* \varphi'_{i,3} \rangle = -\langle [\mathcal{N}_{\nu,\mu}^c], \varphi_{i,3} \rangle.$$

La proposition 3.51 nous permet d'obtenir

$$\langle [\mathcal{N}_{\mu,\nu}^{\dagger c}], \varphi_{1,3} \rangle = 0 \quad \langle [\mathcal{N}_{\mu,\nu}^{\dagger c}], \varphi_{2,3} \rangle = i2\pi.$$

$\square$

### 3.3.5 Extension aux cas $\mu = 0$ ou $\nu = 0$

Dans le cas  $\mu = 0$ , le module  $N$  n'existe pas et la méthode proposée ci-dessus ne convient pas. Pour contourner cette difficulté, nous allons prouver que nous pouvons trouver un isomorphisme entre  $D_{\mu+k, \nu+l}^c$  et  $D_{\mu, \nu}^c$ .

Cet isomorphisme a été prouvé par Abadie – voir la proposition 1 de [1]. Nous ajoutons juste l'entrelacement des actions de  $H_3$ . Ce qui suit est modelé sur la proposition 3.52.

**Proposition 3.58.** *Il existe un isomorphisme  $\Psi: D_{\mu, \nu}^c \rightarrow D_{\mu+1, \nu}^c$ , induit par la représentation de bimodules hilbertiens sur  $D_{\mu+1, \nu}^c$  :*

$$\pi(a)(x, y, p) = \delta_{0, p} a(x, y) \quad \mathcal{T}(\xi)(x, y, p) = \delta_{1, p} e^{i2\pi c(y-4\nu/3)} \xi(x, y).$$

Cet isomorphisme entrelace les représentations de  $H_3$  :

$$\Psi(\alpha_{r, s, t}(F)) = \alpha'_{r, s, t-cs}(\Psi(F)) \quad (3.16)$$

où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont les actions de  $H_3$  sur  $D_{\mu, \nu}^c$  et  $D_{\mu+1, \nu}^c$ , respectivement. Cette relation prouve que les éléments lisses de  $D_{\mu, \nu}^c$  sont envoyés sur les éléments lisses de  $D_{\mu+1, \nu}^c$  et réciproquement.

**Remarque 3.59.** Il est évident que  $M_{\mu, \nu}^c \simeq M_{\mu, \nu+k}^c$ , où  $k$  est un entier. En outre cet isomorphisme préserve clairement l'action  $\alpha$  et donc que  $D_{\mu, \nu}^c \simeq D_{\mu, \nu+k}^c$  – et l'action de  $H_3$  est préservée.

Une fois la proposition 3.58 démontrée, nous pourrions toujours nous ramener au cas  $\mu \neq 0$  et  $\nu \neq 0$ , indépendamment des paramètres  $\mu, \nu$  choisis initialement.

*Démonstration.* Les relations (3.4) étant indépendantes de  $\mu$ , les images de la représentation proposée sont dans  $D_{\mu+1, \nu}^c$ . S'agit-il d'une représentation de bimodules hilbertiens ?

Comme précédemment, il suffit de prouver les points (i) et (iv) de la définition 1.48 pour obtenir un morphisme  $\Psi: D_{\mu, \nu}^c \rightarrow D_{\mu+1, \nu}^c$ . Pour (i), nous avons tout d'abord

$$\mathcal{T}(\xi)^*(x, y, p) = \delta_{-1, p} e^{-i2\pi c(y+2\nu-4\nu/3)} \overline{\xi(x+2(\mu+1), y+2\nu)}$$

puis d'une part :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi)^* \mathcal{T}(\zeta)(x, y, 0) &= \\ &= e^{-i2\pi c(y+2\nu-4\nu/3)} \overline{\xi(x+2(\mu+1), y+2\nu)} e^{i2\pi c(y+2\nu-4\nu/3)} \zeta(x+2(\mu+1), y+2\nu) = \\ &= \overline{\xi(x+2\mu+2, y+2\nu)} \zeta(x+2\mu+2, y+2\nu) = \pi(\langle \xi, \zeta \rangle_A)(x, y, 0), \end{aligned}$$

car les produits scalaires de  $M_{\mu+1, \nu}^c$  sont à valeurs dans  $C(T^2)$ , et d'autre part :

$$\mathcal{T}(\zeta) \mathcal{T}(\xi)^*(x, y, 0) = e^{i2\pi c(y-4\nu/3)} \zeta(x, y) e^{-i2\pi c(y-4\nu/3)} \overline{\xi(x, y)} = \pi({}_A \langle \zeta, \xi \rangle)(x, y).$$

Comme pour la proposition 3.52, il suffit de vérifier que la relation (3.16) sur les générateurs, à savoir  $\pi(A)$  et  $\mathcal{T}(M_{\mu,\nu}^c)$ . La propriété est évidente sur  $\pi(A)$ . Pour  $\mathcal{T}(M_{\mu,\nu}^c)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha_{(r,s,t)}(\xi))(x,y) &= e^{i2\pi c(y-4\nu/3)} e\left(-\left(t+cs(x-r)\right)\right) \xi(x-r, y-s) = \\ &= e\left(-\left(t-cs+cs(x-r)\right)\right) e^{i2\pi c(y-s-4\nu/3)} \xi(x-r, y-s) = \\ &= \alpha'_{r,s,t-cs}(\mathcal{T}(\xi))(x,y). \end{aligned}$$

La représentation  $(\pi, \mathcal{T})$  est clairement injective. Comme elle entrelace les actions de  $H_3$ , et donc en particulier les actions de jauge,  $\Psi$  est un isomorphisme.  $\square$

**Définition 3.60** (module  $\Psi_* N_{\mu,\nu}^c$ ). On note  $\Psi_* N_{\mu+1,\nu}^c$  le module induit sur  $D_{\mu+1,\nu}^c$  à partir de  $N_{\mu+1,\nu}^c$  via  $\Psi$ .

Étant donné que  $\alpha'_{r,s,t-cs}$  est une représentation de  $H_3$ , nous pouvons munir  $\Psi_* N_{\mu,\nu}^c$  d'une action de  $H_3$ , comme dans la définition 3.56. Il est alors possible de définir une « version lisse » de  $\Psi_* N_{\mu,\nu}^c$ .

En utilisant ces modules induits, il est possible de trouver des modules projectifs de type fini sur  $D_{\mu,\nu}^c$  quels que soient les paramètres  $\mu, \nu$  de départ.

Dans la suite, nous illustrerons cette possibilité pour  $\mu = 0$  et  $\nu \neq 0$ .

**Lemme 3.61.** *L'isomorphisme  $\Psi$  laisse la trace et les cocycles cycliques invariants. Plus précisément :*

- $\tau_{1,\nu}^c(\Psi(F)) = \tau_{0,\nu}^c(F)$ ,
- les dérivations  $\partial'_i$  sur  $\mathcal{D}_{\mu+1,\nu}^c$  satisfont les relations :

$$\partial'_1 \circ \Psi = \Psi \circ \partial_1 \quad (\partial'_2 - c\partial'_3) \circ \Psi = \Psi \circ \partial_2 \quad \partial'_3 \circ \Psi = \Psi \circ \partial_3,$$

- $\varphi'_{i,3} \circ \Psi = \Psi \circ \varphi_{i,3}$ .

avec des notations évidentes.

La démonstration est évidente à partir du calcul de la proposition 3.57. Nous en profitons pour noter  $\tau$  et  $\varphi_{i,3}$  dans tous les cas.

**Proposition 3.62.** *Si  $\mu = 0$  et  $\nu \neq 0$ , nous pouvons définir et calculer les appariements suivants :*

	$\tau$	$\varphi_{1,3}$	$\varphi_{2,3}$
$[\mathcal{D}]$	1	0	0
$[\Psi_* \mathcal{N}]$	2	$-i2\pi$	0
$[\mathcal{N}^\dagger]$	$-2\nu$	0	$i2\pi$

*Démonstration.* En suivant la remarque 3.54, il est clair que :

$$\langle [\Psi_* \mathcal{N}_{1,\nu}^c], \Psi^* \varphi_{i,3} \rangle = \langle [\mathcal{N}_{1,\nu}^c], \varphi_{i,3} \rangle$$

Vu le tableau (3.14), nous obtenons les résultats précisés ci-dessus.  $\square$



**Remarque 3.63.** Il peut paraître surprenant qu'un module « cesse d'exister » pour une certaine valeur de paramètre, mais c'est un phénomène que l'on peut déjà constater sur les tores non-commutatifs  $A_\theta$ . En effet, dans [44], il est prouvé que si  $\theta \neq 0$ , on peut doter  $C_c(\mathbb{R})$  d'une structure de module pré-hilbertien sur  $A_\theta$ . Le produit scalaire est :

$$\langle f, g \rangle_{A_\theta}(s) = \sum_{n,m} \overline{f(s-m)} g(s+n\theta-m) U^n,$$

où nous identifions  $A_\theta$  au produit croisé  $C(T) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ . En complétant  $C_c(\mathbb{R})$  grâce à ce produit scalaire, nous obtenons un bimodule  $E$  d'équivalence de Morita entre deux algèbres unifères (théorème 1.1 de [44]), ce qui prouve que le module obtenu est projectif de type fini.

Cependant, ce module n'existe pas pour  $\theta = 0$ . Tout comme dans le cas ci-dessus, on peut tirer profit de l'isomorphisme  $A_\theta \simeq A_{\theta+1}$  pour remplacer  $E$  par un module qui « ne disparaît pas » pour  $\theta = 1$ .

Notons que dans les deux cas, le problème apparaît lorsque l'algèbre devient commutative.

### 3.4 Appariements impairs

#### 3.4.1 Définitions, résultats et premiers calculs

Nous reprenons la notation  $\phi \# \text{Tr}$  déjà utilisée dans l'équation (3.13).

**Définition 3.64** (accouplements de Chern-Connes). La formule suivante définit des accouplements bilinéaires entre  $K_1(\mathcal{A})$  et  $HC^n(\mathcal{A})$  :

$$\langle [U], [\phi] \rangle = \frac{2^{-n}}{\sqrt{2i}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1} (\phi \# \text{Tr})(U^* - 1, U - 1, U^* - 1, \dots, U - 1), \quad (3.17)$$

où  $n = 2m + 1$ ,  $[U] \in K_1(\mathcal{A})$  et  $\phi \in HC^n(\mathcal{A})$ . Ces appariements vérifient  $\langle [U], [S\phi] \rangle = \langle [U], [\phi] \rangle$ .

**Théorème 3.65.** En reprenant les unitaires  $U_i$  donnés par le corollaire 3.35, les valeurs des appariements impairs sont données par le tableau :

	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_{1,2,3}$
$[U_1]$	$-\sqrt{i2\pi}$	0	0	0
$[U_2]$	0	$-\sqrt{i2\pi}$	0	0
$[U_3]$	$-\sqrt{i2\pi} 2c\nu$	$\sqrt{i2\pi} 2c\mu$	0	$-(i2\pi)^{3/2} c/3$

(3.18)

Le calcul de ces résultats va occuper toute la suite de cette section.

**Remarque 3.66.** La colonne de  $\varphi_3$  est nulle, alors que  $\varphi_3$  est non nul en tant que cocycle de Hochschild, comme le prouvent les appariements de la proposition 3.38. Le triangle SBI permet d'en déduire  $\varphi_3 \neq 0$  dans  $HC^1(\mathcal{D})$ . Toutefois, une conséquence de (3.18) et du théorème 3.87 est que  $\varphi_3 = 0$  dans  $HP^1(\mathcal{D})$ .

Les premiers calculs d'appariements sont très simples :

**Proposition 3.67.** *Les appariements de  $U_1$  et  $U_2$  sont donnés par les deux premières lignes du tableau (3.18).*

*Démonstration.* Il suffit d'évaluer

$$\langle [U_i], [\varphi_j] \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2i}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tau((U_i^* - 1)\partial_j(U_i - 1)) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \tau((U_i^* - 1)\partial_j(U_i - 1)).$$

Si  $i = 1$  et  $j \neq 1$ , alors  $\partial_j(U_1 - 1) = 0$ . Si  $i = 1 = j$ , alors  $\partial_1(U_1 - 1) = -i2\pi U_1$  et donc

$$\langle [U_1], [\varphi_1] \rangle = -\sqrt{2i\pi} \tau((U_1^* - 1)U_1) = -\sqrt{2i\pi} \tau(1 - U_1) = -\sqrt{2i\pi}.$$

Le même raisonnement permet de traiter le cas  $i = 2$ .

Il nous reste donc à évaluer les appariements avec  $\varphi_{1,2,3}$ , soit :

$$\langle [U_i], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \varepsilon(\sigma) \tau((U_i^* - 1)\partial_{\sigma(1)}(U_i - 1)\partial_{\sigma(2)}(U_i^* - 1)\partial_{\sigma(3)}(U_i - 1)).$$

Dans la somme ci-dessus, chaque terme contient une dérivation nulle, ce qui veut dire que l'accouplement avec  $\varphi_{1,2,3}$  est toujours nul.  $\square$

### 3.4.2 Translation des dérivations et appariements de $HC^1(\mathcal{D})$

Avant de pouvoir calculer les appariements entre cocycles de degré 1 et  $U_3$ , nous examinons les relations de commutations entre  $\alpha$  et les dérivations  $\partial_j$ .

**Notation 3.68.** Notons  $\partial_{(u,v,w)} = u\partial_1 + v\partial_2 + w\partial_3$ . Il est clair que  $\partial_{(u,v,w)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_{\lambda u, \lambda v, \lambda w}$ .

**Proposition 3.69.** *L'égalité*

$$\alpha_{r,s,t}(\partial_{(u,v,w)}(F)) = \partial_{(u',v',w')}(\alpha_{r,s,t}(F))$$

*est réalisée si et seulement si*

$$u = u' \quad v = v' \quad w = w' + c(v'r - su'). \quad (3.19)$$

*Démonstration.* Il est immédiat en utilisant (3.8) que

$$\begin{aligned} (r, s, t)(\lambda u, \lambda v, \lambda w) &= (r + \lambda u, s + \lambda v, t + \lambda w + cs\lambda u) \\ (\lambda u', \lambda v', \lambda w')(r, s, t) &= (\lambda u' + r, \lambda v' + s, \lambda w' + t + c\lambda v'r). \end{aligned}$$

Comme par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\alpha_{r,s,t}(\alpha_{\lambda u, \lambda v, \lambda w}(F))) &= \alpha_{r,s,t}(\partial_{(u,v,w)}(F)) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}(\alpha_{\lambda u', \lambda v', \lambda w'}(\alpha_{r,s,t}(F))) &= \partial_{(u',v',w')}(\alpha_{r,s,t}(F)), \end{aligned}$$

nous obtenons le résultat.  $\square$

**Proposition 3.70.** *Les appariements de  $U_3$  avec les cocycles cycliques de degré 1 sont donnés dans le tableau (3.18).*

*Démonstration.* Pour simplifier les notations, on écrira  $\partial$  et  $\varphi$  au lieu de  $\partial_i$  et  $\varphi_i$ . On étend  $\tau$  en un cocycle cyclique sur  $M_2(\mathcal{D})$  par la formule  $\tau \# \text{Tr}$ . Par abus de notations,  $\tau \# \text{Tr}$  sera également noté  $\tau$ .

Partons de l'expression  $U_3 = M_+ + M_-$  et introduisons la dans l'équation (3.17) :

$$\sqrt{2i\pi} \langle [U_3], [\varphi] \rangle = \tau((M_+^* + M_-^* - 1)\partial(M_+ + M_-)) = \tau((M_+^* + M_-^*)\partial(M_+ + M_-))$$

car  $\tau(\partial(M_+ + M_-)) = 0$ . La trace s'annule sur les éléments de degré non nul, donc nous pouvons ne conserver que les termes de degré 0 :

$$\sqrt{2i\pi} \langle [U_3], [\varphi] \rangle = \tau(M_+^* \partial M_+ + M_-^* \partial M_-).$$

Explicitement :

$$\partial M_+ = \begin{pmatrix} \partial \xi_1 & 0 \\ -\partial \xi_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \partial M_- = \begin{pmatrix} 0 & \partial \sigma(\xi_2^*) \\ 0 & \partial \sigma(\xi_1^*) \end{pmatrix}$$

et donc

$$M_+^* \partial M_+ = \begin{pmatrix} \xi_1^* \partial \xi_1 + \xi_2^* \partial \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_-^* \partial M_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma(\xi_2) \partial \sigma(\xi_2^*) + \sigma(\xi_1) \partial \sigma(\xi_1^*) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors utiliser la relation de commutation :

$$\partial \sigma(F) = \sigma(\partial(F)) + k \sigma(\partial_3(F))$$

valable pour toutes les dérivations  $\partial_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , avec des constantes  $k$  différentes. La proposition 3.69 nous donne les valeurs

$$k_1 = -2c\nu \quad k_2 = 2c\mu \quad k_3 = 0.$$

En intégrant la relation de commutation dans  $\sigma(\xi_2) \partial \sigma(\xi_2^*) + \sigma(\xi_1) \partial \sigma(\xi_1^*)$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(\xi_1) \sigma(\partial \xi_1^* + k \partial_3(\xi_1^*)) + \sigma(\xi_2) \sigma(\partial \xi_2^* + k \partial_3(\xi_2^*)) &= \\ &= \sigma(\xi_1 \partial(\xi_1^*) + \xi_2 \partial(\xi_2^*) + k(\xi_1 \partial_3(\xi_1^*) + \xi_2 \partial_3(\xi_2^*))). \end{aligned}$$

Comme  $\partial_3(\xi_i^*) = i2\pi \xi_i^*$ ,  $\xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* = 1$  et  $\tau(1) = 1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{2i\pi} \langle [U_3], [\varphi] \rangle &= \tau(\xi_1^* \partial \xi_1 + \xi_2^* \partial \xi_2) + \tau(\sigma(\xi_1 \partial \xi_1^* + \xi_2 \partial \xi_2^*)) + i2\pi k \\ &= \tau(\xi_1^* \partial \xi_1 + \xi_2^* \partial \xi_2 + \sigma(\xi_1 \partial \xi_1^* + \xi_2 \partial \xi_2^*)) + i2\pi k \\ &= \tau(\xi_1^* \partial \xi_1 + \xi_2^* \partial \xi_2 + \partial(\xi_1^*) \xi_1 + \partial(\xi_2^*) \xi_2) + i2\pi k \\ &= \tau(\partial(\xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2)) - i2\pi k = \tau(\partial(1)) + i2\pi k \end{aligned}$$

qui provient de  $\tau(\sigma(\xi \eta^*)) = \tau(\xi \eta^*) = \tau(\eta^* \xi)$ , puis de  $\xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2 = 1$ . Ainsi

$$\langle [U_3], [\varphi] \rangle = \sqrt{2i\pi} k,$$

soit encore

$$\langle [U_3], [\varphi_1] \rangle = -\sqrt{2i\pi} 2c\nu \quad \langle [U_3], [\varphi_2] \rangle = \sqrt{2i\pi} 2c\mu \quad \langle [U_3], [\varphi_3] \rangle = 0.$$

□

### 3.4.3 Appariement de degré 3

**Proposition 3.71.** *L'appariement  $\langle [U_3], [\varphi_{1,2,3}] \rangle$  est donné par le tableau (3.18).*

Le calcul de cet appariement occupe la suite de cette sous-section. De façon surprenante, l'essentiel de ce calcul est purement algébrique. Prenons  $\mathcal{U} = U_3 = M_+ + M_-$ , il s'agit ici d'évaluer :

$$\langle [U_3], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \frac{1}{8\sqrt{2i}} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \varepsilon(\sigma) T_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)} \quad (3.20)$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$  sur  $\{1, 2, 3\}$  et

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \tau((\mathcal{U}^* - 1)\partial_i(\mathcal{U} - 1)\partial_j(\mathcal{U}^* - 1)\partial_k(\mathcal{U} - 1)) \\ &= \tau((\mathcal{U}^* - 1)\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)\partial_k(\mathcal{U})). \end{aligned}$$

Nous pouvons tout de suite écrire :

$$\tau(\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)\partial_k(\mathcal{U})) = \tau(\partial_i(M_+ + M_-)\partial_j(M_+^* + M_-^*)\partial_k(M_+ + M_-)) = 0,$$

car tous les termes qu'on obtient sont de degré impair – et donc de trace nulle.

Ainsi

$$T_{ijk} = \tau(\mathcal{U}^*\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)\partial_k(\mathcal{U})).$$

Commençons par un lemme algébrique :

**Lemme 3.72.** *Nous avons les relations :*

$$\partial_i(M_{\pm})M_{\mp}^* = -M_{\pm}\partial_i(M_{\mp}^*) \quad \partial_i(M_{\pm}^*)P_{\mp} = -M_{\pm}^*\partial_i(P_{\mp}) \quad (3.21)$$

$$\tau(P_{\mp}\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*)) = \tau(P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})\partial_i(P_{\pm})) \quad (3.22)$$

$$\tau(P_{\pm}\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*)) = \tau(\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*) + P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})\partial_i(P_{\pm})). \quad (3.23)$$

Attention aux permutations entre  $i$  et  $j$  dans les équations (3.22) et (3.23) !

*Démonstration.* La première série se prouve par intégration par parties :

$$\partial_i(M_{\pm})M_{\mp}^* = \partial_i(M_{\pm}M_{\mp}^*) - M_{\pm}\partial_i(M_{\mp}^*) = -M_{\pm}\partial_i(M_{\mp}^*)$$

car  $M_{\pm}M_{\mp}^* = 0$ . Nous avons également  $M_{\pm}^*P_{\mp} = M_{\pm}^*P_{\pm}P_{\mp} = 0$ , qui permet de prouver la seconde égalité par la même méthode.

$$\begin{aligned} \tau(P_{\mp}\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*)) &= \tau(\partial_j(M_{\pm}^*)P_{\mp}\partial_i(M_{\pm})) = \\ &= -\tau(M_{\pm}^*\partial_j(P_{\mp})\partial_i(M_{\pm})) = \tau(M_{\pm}^*\partial_j(P_{\pm})\partial_i(M_{\pm})) \\ &= \tau(M_{\pm}^*\partial_j(P_{\pm})(\partial_i(P_{\pm})M_{\pm} + P_{\pm}\partial_i(M_{\pm}))) = \\ &= \tau(P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})\partial_i(P_{\pm}) + M_{\pm}^*P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})P_{\pm}\partial_i(M_{\pm})) = \\ &= \tau(P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})\partial_i(P_{\pm})) \end{aligned}$$

en utilisant (3.21),  $\partial_i(P_{\mp}) = -\partial_i(P_{\pm})$ , la proposition 3.34, le fait que  $\tau$  est une trace et  $P_{\pm}\partial_i(P_{\pm})P_{\pm} = 0$ . Cette dernière égalité provient de ce que  $P_{\pm}$  est un idempotent et  $\partial_i$  une dérivation.

Pour la dernière équation :

$$\begin{aligned} \tau(P_{\pm}\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*)) &= \tau((\partial_i(P_{\pm}M_{\pm}) - \partial_i(P_{\pm})M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*)) = \\ &= \tau(\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*) - \partial_i(P_{\pm})M_{\pm}\partial_j(M_{\pm}^*)P_{\pm} + \partial_i(P_{\pm})M_{\pm}M_{\pm}^*\partial_j(P_{\pm})) = \\ &= \tau(\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*) - P_{\pm}\partial_i(P_{\pm})P_{\pm}M_{\pm}\partial_j(M_{\pm}^*) + P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})\partial_i(P_{\pm})) = \\ &= \tau(\partial_i(M_{\pm})\partial_j(M_{\pm}^*) + P_{\pm}\partial_j(P_{\pm})\partial_i(P_{\pm})), \end{aligned}$$

possible car  $M_{\pm}^* = M_{\pm}^*P_{\pm}$ . □

Enfin, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.73.** *Si  $(i, j) = (1, 2)$  ou  $(2, 1)$ , nous avons d'une part :*

$$\tau(\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)) = \tau(\partial_i(M_+)\partial_j(M_+^*) + \partial_i(M_-)\partial_j(M_-^*))$$

*et d'autre part :*

$$\tau(\partial_1(\mathcal{U})\partial_2(\mathcal{U}^*) - \partial_2(\mathcal{U})\partial_1(\mathcal{U}^*)) = 0.$$

*Démonstration.* La première égalité est évidente en ne conservant que les termes de degré 0 dans

$$\tau(\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)) = \tau(\partial_i(M_+ + M_-)\partial_j(M_+^* + M_-^*)).$$

Pour la seconde égalité, nous faisons des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \tau(\partial_1(\mathcal{U})\partial_2(\mathcal{U}^*) - \partial_2(\mathcal{U})\partial_1(\mathcal{U}^*)) &= \\ &= \tau(\partial_1(\mathcal{U}\partial_2(\mathcal{U}^*)) - \mathcal{U}\partial_1\partial_2(\mathcal{U}^*) - \partial_2(\mathcal{U}\partial_1(\mathcal{U}^*)) + \mathcal{U}\partial_2\partial_1(\mathcal{U}^*)) = \\ &= c\tau(\mathcal{U}\partial_3(\mathcal{U}^*)) = 0 \end{aligned}$$

en utilisant  $\tau(\partial x) = 0$ ,  $[\partial_1, \partial_2] = -c\partial_3$  et  $\langle [\mathcal{U}], [\varphi_3] \rangle = 0$ . □

**Termes  $T_{132}$  et  $T_{231}$**

En utilisant la propriété :  $\partial_3(M_{\pm}^*) = \pm i2\pi M_{\pm}^*$ , nous pouvons évaluer  $T_{231}$  :

$$\begin{aligned} T_{231} &= i2\pi\tau((M_+^* + M_-^*)\partial_2(\mathcal{U})(M_+^* - M_-^*)\partial_1(\mathcal{U})) \\ &= i2\pi\tau(M_+^*\partial_2(\mathcal{U})M_+^*\partial_1(\mathcal{U}) - M_+^*\partial_2(\mathcal{U})M_-^*\partial_1(\mathcal{U}) \\ &\quad + M_-^*\partial_2(\mathcal{U})M_+^*\partial_1(\mathcal{U}) - M_-^*\partial_2(\mathcal{U})M_-^*\partial_1(\mathcal{U})) \end{aligned}$$

De même pour  $T_{132}$  :

$$\begin{aligned} T_{132} &= i2\pi\tau\left((M_+^* + M_-^*)\partial_1(\mathcal{U})(M_+^* - M_-^*)\partial_2(\mathcal{U})\right) \\ &= i2\pi\tau\left(M_+^*\partial_1(\mathcal{U})M_+^*\partial_2(\mathcal{U}) - M_+^*\partial_1(\mathcal{U})M_-^*\partial_2(\mathcal{U}) \right. \\ &\quad \left. + M_-^*\partial_1(\mathcal{U})M_+^*\partial_2(\mathcal{U}) - M_-^*\partial_1(\mathcal{U})M_-^*\partial_2(\mathcal{U})\right) \end{aligned}$$

En prenant en compte le  $\varepsilon(\sigma)$  de (3.20) et le fait que  $\tau$  est une trace,

$$T_{231} - T_{132} = i4\pi\tau\left(M_-^*\partial_2(\mathcal{U})M_+^*\partial_1(\mathcal{U}) - M_+^*\partial_2(\mathcal{U})M_-^*\partial_1(\mathcal{U})\right).$$

Comme en outre  $\mathcal{U} = M_+ + M_-$ , nous pouvons mettre les deux termes sous la forme générale :

$$\tau\left(M_+^*\partial_i(M_+ + M_-)M_-^*\partial_j(M_+ + M_-)\right)$$

En ne gardant que les éléments de degré total nul :

$$\tau\left(M_+^*\partial_i(M_+)M_-^*\partial_j(M_-) + M_+^*\partial_i(M_-)M_-^*\partial_j(M_+)\right)$$

Le premier terme s'intègre par parties en :

$$\left(\partial_i(M_+^*M_+) - \partial_i(M_+^*)M_+\right)M_-^*\partial_j(M_-)$$

qui est nul car  $\partial_i(M_+^*M_+) = \partial_i(Q_+) = 0$  et  $M_+M_-^* = 0$ .

Pour le second terme,

$$\begin{aligned} \tau\left(M_+^*\left(\underbrace{\partial_i(M_-M_-^*)}_{=P_-} - M_-^*\partial_i(M_-^*)\right)\partial_j(M_+)\right) &= \tau\left(M_+^*\partial_i(P_-)\partial_j(M_+)\right) = \\ &= -\tau\left(\partial_i(M_+^*)P_-^*\partial_j(M_+)\right) = -\tau\left(P_-^*\partial_j(M_+)\partial_i(M_+^*)\right) = -\tau(P_+\partial_i(P_+)\partial_j(P_+)), \end{aligned}$$

en appliquant la proposition 3.34, (3.21), la propriété de trace puis (3.22).

Les termes  $T_{132}$  et  $T_{231}$  apportent donc une contribution

$$T_{231} - T_{132} = -i4\pi\tau\left(P_+(\partial_1P_+\partial_2P_+ - \partial_2P_+\partial_1P_+)\right).$$

### Termes $T_{123}$ et $T_{213}$

Comme  $\partial_3(M_\pm) = \mp i2\pi M_\pm$ , les termes  $T_{123}$  et  $T_{213}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_{ij3} &= i2\pi\tau\left((M_+^* + M_-^*)\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)(-M_+ + M_-)\right) = \\ &= i2\pi\tau\left((-P_+ + P_-)\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)\right) = i2\pi\tau\left((I_2 - 2P_+)\partial_i(\mathcal{U})\partial_j(\mathcal{U}^*)\right). \end{aligned}$$

En faisant alors la somme  $T_{123} - T_{213}$ , puis en utilisant le lemme 3.73, l'expression devient :

$$T_{123} - T_{213} = -i4\pi\tau\left(P_+(\partial_1(\mathcal{U})\partial_2(\mathcal{U}^*) - \partial_2(\mathcal{U})\partial_1(\mathcal{U}^*))\right).$$

Étudions le terme de forme

$$\begin{aligned}\tau(P_+ \partial_i(M_+ + M_-) \partial_j(M_+^* + M_-^*)) &= \tau(P_+ (\partial_i(M_+) \partial_j(M_+^*) + \partial_i(M_-) \partial_j(M_-^*))) = \\ &= \tau(\partial_i(M_+) \partial_j(M_+^*) + P_+ \partial_j(P_+) \partial_i(P_+) + P_- \partial_j(P_-) \partial_i(P_-)) = \\ &= \tau(\partial_i(M_+) \partial_j(M_+^*) + \partial_j(P_+) \partial_i(P_+)),\end{aligned}$$

en utilisant les équations (3.23) et (3.22), puis  $\partial_i(P_-) \partial_j(P_-) = \partial_i(P_+) \partial_j(P_+)$ .

Ensuite,

$$\tau(\partial_1(P_+) \partial_2(P_+) - \partial_2(P_+) \partial_1(P_+)) = 0,$$

car  $\tau$  est une trace.

Au final, la contribution des termes  $T_{123}$  et  $T_{213}$  est

$$T_{123} - T_{213} = -i4\pi\tau(\partial_1(M_+) \partial_2(M_+^*) - \partial_2(M_+) \partial_1(M_+^*)).$$

**Termes  $T_{312}$  et  $T_{321}$**

**Lemme 3.74.** *Des analogues de 3.72 sont valables :*

$$Q_+ \partial_i M_\pm^* = -\partial_i(Q_+) M_\pm^* = 0 \quad Q_\pm \partial_i M_\pm^* = \partial_i(M_\pm^*) \quad (3.24)$$

$$Q_+ \partial_i(M_\pm^*) \partial_j(M_\pm) = 0 \quad (3.25)$$

$$Q_\pm \partial_i(M_\pm^*) \partial_j(M_\pm) = \partial_i(M_\pm^*) \partial_j(M_\pm). \quad (3.26)$$

*Démonstration.* Pour la première série de relation,

$$Q_+ \partial_i M_\pm^* = \partial_i(Q_+ M_\pm^*) - \partial_i(Q_+) M_\pm^* = 0$$

car  $Q_+ M_\pm^* = Q_+ Q_\pm M_\pm^* = 0$  et  $\partial_i(Q_\pm) = 0$ . De même,

$$Q_\pm \partial_i M_\pm^* = \partial_i(Q_\pm M_\pm^*) - \partial_i(Q_\pm) M_\pm^* = \partial_i(M_\pm^*),$$

grâce à  $Q_\pm M_\pm^* = M_\pm^*$ . Pour la seconde série,

$$Q_+ \partial_i(M_\pm^*) \partial_j(M_\pm) = -\partial_i(Q_+) M_\pm^* \partial_j(M_\pm) = 0,$$

en utilisant les relations précédentes. La troisième relation est évidente à partir de 3.24.  $\square$

Les termes  $T_{312}$  et  $T_{321}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}T_{3ij} &= i2\pi\tau((M_+^* + M_-^*)(-M_+ + M_-) \partial_i(\mathcal{U}^*) \partial_j(\mathcal{U})) = \\ &= i2\pi\tau((-Q_+ + Q_-) \partial_i(\mathcal{U}^*) \partial_j(\mathcal{U})) = i2\pi\tau((I_2 - 2Q_+) \partial_i(\mathcal{U}^*) \partial_j(\mathcal{U})).\end{aligned}$$

Faisons la différence  $T_{312} - T_{321}$ , puis utilisons le lemme 3.73. Nous obtenons :

$$T_{312} - T_{321} = -i4\pi\tau(Q_+ (\partial_1(\mathcal{U}^*) \partial_2(\mathcal{U}) - \partial_2(\mathcal{U}^*) \partial_1(\mathcal{U}))).$$

Étudions le terme de la forme suivante, en prenant en compte le lemme 3.73 :

$$\begin{aligned}\tau(Q_+ \partial_i(M_+^* + M_-^*) \partial_j(M_+ + M_-)) &= \tau(Q_+ (\partial_i(M_+^*) \partial_j(M_+) + \partial_i(M_-^*) \partial_j(M_-))) = \\ &= \tau(\partial_i(M_+^*) \partial_j(M_+)).\end{aligned}$$

La différence s'écrit donc :

$$T_{312} - T_{321} = -i4\pi\tau(\partial_1(M_+^*) \partial_2(M_+) - \partial_2(M_+^*) \partial_1(M_+)).$$

### Synthèse et calcul

Si nous faisons la synthèse des termes étudiés :

$$\begin{aligned}6\sqrt{2i\pi} \langle [U_3], [\varphi_{1,2,3}] \rangle &= (T_{231} - T_{132} + T_{123} - T_{213} + T_{312} - T_{321} +) \\ &= -i4\pi\tau(P_+(\partial_1 P_+ \partial_2 P_+ - \partial_2 P_+ \partial_1 P_+)) \\ &\quad - i4\pi\tau(\partial_1(M_+) \partial_2(M_+^*) - \partial_2(M_+) \partial_1(M_+^*)) \\ &\quad - i4\pi\tau(\partial_1(M_+^*) \partial_2(M_+) - \partial_2(M_+^*) \partial_1(M_+)) \\ &= -i4\pi\tau(P_+(\partial_1 P_+ \partial_2 P_+ - \partial_2 P_+ \partial_1 P_+)) \\ &= -i4\pi \langle [P_+], [\psi_{1,2}] \rangle,\end{aligned}$$

où  $\psi_{1,2}$  est le cocycle cyclique défini sur  $\mathcal{A} = C^\infty(T^2)$  par

$$(a_0, a_1, a_2) \longmapsto \int_{T^2} a_0 (\partial_1 a_1 \partial_2 a_2 - \partial_2 a_1 \partial_1 a_2) (x, y) dx dy.$$

Le terme de droite est un appariement sur l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Nous pouvons le calculer en utilisant une connexion.

Commençons par identifier le module sur  $C(T^2)$  auquel correspond le projecteur  $P_+ = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* & -\xi_1 \xi_2^* \\ -\xi_2 \xi_1^* & \xi_2 \xi_2^* \end{pmatrix}$ .

**Lemme 3.75.** *Le module  $P_+ A^2$  est isomorphe comme module hilbertien à  $(M_{0,0}^{-c})_A$ .*

**Notation 3.76.** Nous écrivons  $\xi_i$  pour le repère de  $M_{0,0}^c$  obtenu grâce au lemme 3.5.  $\xi_i^*$  est alors un repère de  $M_{0,0}^{-c}$ . Nous noterons  $\zeta^*$  les éléments de  $M_{0,0}^{-c}$ . De façon générale, nous incluons  $M_{0,0}^{-c}$  comme éléments homogènes de degré  $p = -1$  dans  $D_{0,0}^c$  pour la suite du calcul.

*Démonstration.* Nous définissons des applications  $\Phi: P_+ A^2 \rightarrow M_{0,0}^{-c}$  et  $\Psi: M_{0,0}^{-c} \rightarrow P_+ A^2$  par :

$$\Phi \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^* & -\xi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \xi_1^* a_1 - \xi_2^* a_2 \quad \Psi(\zeta) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} \zeta^* = \begin{pmatrix} \xi_1 \zeta^* \\ -\xi_2 \zeta^* \end{pmatrix}$$



Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  sont réciproques l'une de l'autre :

$$\Phi \circ \Psi(\zeta^*) = \Phi \begin{pmatrix} \xi_1 \zeta^* \\ -\xi_2 \zeta^* \end{pmatrix} = (\xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2) \zeta^* = \zeta^*$$

et

$$\Psi \circ \Phi \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* & -\xi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = P_+ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Prouvons que ces applications préservent le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* & -\xi_1 \xi_2^* \\ -\xi_2 \xi_1^* & \xi_2 \xi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* & -\xi_1 \xi_2^* \\ -\xi_2 \xi_1^* & \xi_2 \xi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1(\xi_1^* a_1 - \xi_2^* a_2) \\ -\xi_2(\xi_1^* a_1 - \xi_2^* a_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1(\xi_1^* b_1 - \xi_2^* b_2) \\ -\xi_2(\xi_1^* b_1 - \xi_2^* b_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= (\xi_1^* a_1 - \xi_2^* a_2)^* \xi_1^* \xi_1 (\xi_1^* b_1 - \xi_2^* b_2) + (\xi_1^* a_1 - \xi_2^* a_2)^* \xi_2^* \xi_2 (\xi_1^* b_1 - \xi_2^* b_2) = \\ &= (\xi_1^* a_1 - \xi_2^* a_2)^* (\xi_1^* b_1 - \xi_2^* b_2) = \left\langle \Phi \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \Phi \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Le cycle sur  $\mathcal{A}$  associé à  $\psi_{1,2}$  se construit facilement à partir de la proposition 1.65 : on dispose d'une action par translation de  $G = T^2$  sur  $A = C(T^2)$ , donnée par  $\alpha_{r,s}(a)(x, y) = a(x - r, y - s)$ . La proposition 1.65 s'applique clairement en prenant l'intégrale sur  $T^2$  comme trace invariante  $\tau$ . On obtient alors le cocycle cyclique  $\psi_{1,2}$  sur  $\mathcal{A}$  en faisant  $\rho = \partial_1 \wedge \partial_2$  dans la proposition. Le cycle associé est  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}\langle dx, dy \rangle$ .

L'action de  $T^2$  sur  $A$  s'obtient comme restriction de l'action du groupe de Heisenberg, les générateurs infinitésimaux de  $H_3$  sur  $M_{0,0}^{-c}$  nous suggèrent donc la connexion suivante :

**Lemme 3.77.** *Si on considère  $\mathcal{M}_{0,0}^{-c} \subseteq M_{0,0}^{-c}$ , le module sur  $\mathcal{A}$  des fonctions dans  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ , on peut lui donner une connexion associée à  $\psi_{1,2}$  :*

$$(\nabla \zeta^*)(x, y) = -\frac{\partial \zeta^*}{\partial x}(x, y) \otimes dx + \left( -\frac{\partial \zeta^*}{\partial y}(x, y) + i2\pi c x \zeta^*(x, y) \right) \otimes dy.$$

*Démonstration.* L'expression de  $\nabla \zeta^*$  provient des générateurs infinitésimaux de  $H_3$ , il est donc clair que  $\nabla \zeta^* \in \mathcal{M}_{0,0}^{-c} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}\langle dx, dy \rangle \simeq \mathcal{M}_{0,0}^{-c} \otimes \mathbb{C}\langle dx, dy \rangle$ . En revanche, il faut vérifier qu'il s'agit d'une connexion :

$$\begin{aligned} \nabla(\zeta^* a) &= -\frac{\partial \zeta^*}{\partial x} dx a + \left( -\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} + i2\pi c x \zeta^* \right) dy a - \zeta^* \frac{\partial a}{\partial x} dx - \zeta^* \frac{\partial a}{\partial y} dy \\ &= (\nabla \zeta^*) a + \zeta^* \otimes (da), \end{aligned}$$

la différentielle dans le cycle  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}\langle dx, dy \rangle$  étant donnée par  $da = -\frac{\partial a}{\partial x} dx - \frac{\partial a}{\partial y} dy$ . □

**Proposition 3.78.** *La courbure de cette connexion est*

$$(\nabla^2 \zeta^*)(x, y) = i2\pi c \zeta^*(x, y) \otimes dx \wedge dy$$

et l'appariement  $\langle [\mathcal{D}_{0,0}^{-c}], [\psi_{1,2}] \rangle = i2\pi c$ .

*Démonstration.* La courbure se calcule par :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \zeta^*)(x, y) &= \left( \frac{\partial \zeta^*}{\partial x \partial y}(x, y) - i2\pi c \zeta^*(x, y) - i2\pi c x \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}(x, y) \right) \otimes dy \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial y \partial x}(x, y) - i2\pi c x \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}(x, y) \right) \otimes dx \wedge dy = \\ &= i2\pi c \zeta^*(x, y) \otimes dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'appariement, il suffit donc de calculer la trace de l'identité de  $\mathcal{D}_{0,0}^{-c}$ . Or, il s'agit d'un fibré en droite, soit :

$$\mathrm{Tr} \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^2 \langle \xi_i, \xi_i \rangle = 1,$$

d'où  $\langle [\mathcal{D}_{0,0}^{-c}], [\psi_{1,2}] \rangle = i2\pi c$ . □

Cette proposition nous permet de terminer le calcul de  $\langle [U_3], [\varphi_{1,2,3}] \rangle$  :

$$\langle [U_3], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \frac{-i4\pi}{6\sqrt{i2\pi}} i2\pi c = -c \frac{(i2\pi)^{3/2}}{3}.$$

## 3.5 Indice et formule de transfert

### 3.5.1 Indice des unitaires

Il découle immédiatement de (3.11) et du tableau (3.18) que  $(U_1, U_2, U_3)$  est une base de  $K_1(D) \otimes \mathbb{C}$ . En conséquence, il est naturel de se demander si ces éléments génèrent  $K_1(D)$ . La réponse à cette question est négative, comme nous allons le voir dans la suite.

Pour le prouver, notons tout d'abord que les QHM sont des algèbres de Pimsner associés au bimodule hilbertien  $M^c$  et que leurs  $K$ -théories satisfont donc l'hexagone suivant (voir le théorème 4.9 de [41]) :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id} - [M^c]} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota} & K_0(D) \\ \uparrow \partial & & & & \downarrow \partial \\ K_1(D) & \xleftarrow{\iota} & K_1(A) & \xleftarrow{\mathrm{Id} - [M^c]} & K_1(A). \end{array} \quad (3.27)$$

Pour établir cet hexagone, Pimsner commence par exhiber une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow J \rightarrow \mathcal{T}_M \rightarrow D \rightarrow 0, \quad (3.28)$$

où  $\mathcal{T}_M$  est l'algèbre de Toeplitz associée à la  $C^*$ -correspondance  $M$ . Il prouve ensuite que  $J$  et  $\mathcal{T}_M$  sont  $KK$ -équivalents à  $A$ . Dans notre cas particulier, on peut prouver (voir l'annexe A.3) que  $\mathcal{T}_M$  s'identifie à la sous-algèbre involutive de  $\mathcal{T} \otimes D$  générée par  $a \otimes 1$  et  $\xi \otimes S$  où  $a \in A$  et  $\xi \in M$ . La  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{T}$  est nucléaire, nous n'avons donc pas besoin de préciser la  $C^*$ -norme que nous utilisons dans le produit tensoriel. Nous identifions  $\mathcal{T}$  avec la  $C^*$ -algèbre unifère générée par le projecteur  $P$  et l'isométrie  $S$  soumis aux relations

$$SS^* = 1 - P \qquad S^*S = 1.$$

Pour prouver que  $(U_1, U_2, U_3)$  ne génère pas  $K_1(D)$ , nous étudions l'application de l'indice  $\partial: K_1(D) \rightarrow K_0(A)$  associée à l'hexagone (3.27)

**Proposition 3.79.** *L'application de l'indice des classes de  $K$ -théorie  $[U_i]$  est donnée par :*

$$\partial([U_1]) = 0 \qquad \partial([U_2]) = 0 \qquad \partial([U_3]) = [Q_-] \ominus [P_+]$$

en reprenant les notations de la proposition 3.34.

*Démonstration.* Comme  $U_1$  et  $U_2$  proviennent de l'inclusion  $\iota: A \hookrightarrow D$ , les deux premières égalités sont claires.

Pour calculer la dernière égalité, nous allons en fait calculer l'application de l'indice pour l'hexagone associé à la suite courte (3.28) puis traduire le résultat en terme de  $K$ -théorie de  $A$ .

Il est facile de vérifier que

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} M_+ \otimes S + M_- \otimes S^* & P_+ \otimes P \\ Q_- \otimes P & M_+^* \otimes S^* + M_-^* \otimes S \end{pmatrix}$$

est un relèvement unitaire de  $U_3$  dans  $\mathcal{T}_M$ . La fin du calcul s'effectue rapidement :

$$\begin{aligned} \mathbb{U} \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{U}^* &= \\ &= \begin{pmatrix} M_+ \otimes S + M_- \otimes S^* & 0 \\ Q_- \otimes P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_+^* \otimes S^* + M_-^* \otimes S & Q_- \otimes P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 - P_+ \otimes P & 0 \\ 0 & Q_- \otimes P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'indice de  $U_3$  dans  $J$  est  $Q_- \otimes P - P_+ \otimes P$ , qui est l'image de  $Q_- \ominus P_+$  dans  $J$ . La  $KK$ -équivalence entre  $A$  et  $J$  impose donc  $\partial([U_3]) = [Q_-] \ominus [P_+]$ .  $\square$

Le résultat de RIEFFEL cité ci-dessus (théorème 3.2) permet de décrire la  $K$ -théorie de  $A$  :  $K_0(A)$  peut s'identifier aux paires  $(d, t)$  où  $d$  est la « dimension » et  $t$  est le « gauchissement » (*twist*) du module.  $d$  et  $t$  sont des entiers. Nous pouvons choisir la définition du gauchissement de telle façon que  $[M^c] \simeq (1, c)$ , et donc  $[P_+] = (1, -c)$ .

Cette identification, conjuguée avec la proposition 3.10 de [44], nous montre que

$$\text{Id} - [M] : (d, t) \mapsto (d, t) - (d, t + cd) = (0, -cd).$$

Ainsi, le noyau de  $\text{Id} - [M]$  est généré par  $(0, 1)$ . Comme  $\partial([U_3]) = [Q_-] \ominus [P_+] \simeq (0, c)$ ,  $(U_1, U_2, U_3)$  ne génèrent pas  $K_1(D)$ .

Une autre conséquence de la proposition 3.79 et du calcul précédent est

**Corollaire 3.80.** *Pour tout  $U \in K_1(D)$ ,*

$$\langle [U], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \frac{-\sqrt{i2\pi}}{3} \langle \partial[U], [\psi_{1,2}] \rangle. \quad (3.29)$$

*Démonstration.* Le crochet d'appariement étant bilinéaire, il suffit de vérifier cette égalité sur une base de  $K_1(D) \otimes \mathbb{C}$ . Cette égalité est vraie pour  $U = U_1$  et  $U = U_2$ , puisque  $\partial(U_i) = 0$  pour  $i = 1, 2$ .

En ce qui concerne  $U_3$ , notons que  $\langle [Q_-], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \langle [1], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = 0$ . Il s'en suit que

$$\langle [U_3], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \frac{-i4\pi}{6\sqrt{i2\pi}} \langle -[P_+], [\psi_{1,2}] \rangle = \frac{-\sqrt{i2\pi}}{3} \langle \partial([U_3]), [\psi_{1,2}] \rangle.$$

□

La formule de transfert (3.29) nous permet d'établir des propriétés sur la  $K$ -homologie de l'algèbre :

**Corollaire 3.81.** *Il existe un élément de  $K$ -homologie  $K' \in K^1(D)$  tel que pour tout  $[U] \in K_1(D)$ ,*

$$\langle [U], [\varphi_{1,2,3}] \rangle = \frac{(i2\pi)^{3/2}}{3} \langle [U], K' \rangle_K,$$

en notant  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  l'appariement entre  $K$ -théorie et  $K$ -homologie.

En particulier, cet appariement ne prend que des valeurs entières, ce qu'on peut vérifier directement sur le tableau (3.18).

*Démonstration.* Nous savons que dans  $A = C(T^2)$ , on peut trouver une classe de  $K$ -homologie  $K$  telle que

$$\langle [E], [\psi_{1,2}] \rangle = -i2\pi \langle [E], K \rangle_K$$

pour tout  $[E] \in K_0(A)$ . Il est bien connu que la flèche de bord de l'hexagone (3.27) peut s'obtenir comme multiplication par un élément  $\delta \in KK^1(D, A)$ . En multipliant  $K \in K^0(A) = KK_0(A, \mathbb{C})$  par  $\delta$ , nous obtenons un  $K' \in K^1(D)$  tel que

$$i2\pi \langle [U], K' \rangle_K = i2\pi \langle \partial[U], K \rangle_K = -\langle \partial[U], [\phi_{1,2}] \rangle = \frac{3}{\sqrt{i2\pi}} \langle [U], [\varphi_{1,2,3}] \rangle.$$

□

### 3.5.2 Application de la théorie générale : QHM

Pour compléter la description de  $HP^*(\mathcal{D})$ , il ne reste plus qu'à prouver qu'il n'y a aucun cocycle cyclique supplémentaire. Nous évaluons donc la dimension de  $HP^0(\mathcal{D})$  et  $HP^1(\mathcal{D})$ , en privilégiant toujours la méthode des calculs d'appariements pour la théorie périodique. Nous utilisons également les résultats de la section 2.2 : la construction de l'algèbre lisse  $\mathcal{D}$  et la suite exacte courte dans laquelle elle s'inscrit auront une importance cruciale. Dans cette sous-section, nous notons  $\mathcal{A}$  l'algèbre  $C^\infty(T^2)$  munie de sa structure de Fréchet habituelle.

**Proposition 3.82.** *L'algèbre  $\mathcal{D}$  est un produit croisé généralisé lisse modéré, au sens des définitions 2.21 et 2.26. Il s'agit également d'une algèbre de Fréchet.*

*Démonstration.* La définition 3.26 nous assure que les propositions 1.57 et 1.79 s'appliquent à  $\mathcal{D}$ . Ainsi,  $\mathcal{D}$  est une algèbre de Fréchet et un produit croisé généralisé lisse au sens de la définition 2.21.

Il nous reste à prouver que  $\mathcal{D}$  est modéré. Le lemme 3.5 nous fournit des repères  $(\eta_i^p)_{i \in \{1,2\}}$  comportant précisément deux éléments pour tout  $\mathcal{M}^{(p)}$ . La suite  $\xi_m$  la suite obtenue en ordonnant ces repères comme dans la notation 2.24 est donc :

$$\xi_1 = 1 \in \mathcal{A} \quad \xi_2 = \eta_1^1 \quad \xi_3 = \eta_2^1 \quad \xi_4 = \eta_1^2 \quad \xi_5 = \eta_2^2 \quad \xi_6 = \eta_1^3 \quad \dots$$

Cette suite satisfait clairement la première condition de la définition 2.26. Vu les définitions de normes sur  $\mathcal{D}$  (voir la proposition 1.79), il suffit de majorer les semi-normes obtenues comme  $\|\delta_1 \cdots \delta_n \xi\|$  pour  $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathfrak{H}_3$ . L'estimation de ces semi-normes est l'objet des deux lemmes qui suivent.  $\square$

**Lemme 3.83.** *Toute suite finie  $\delta_1 \cdots \delta_n$  d'éléments de  $\mathfrak{H}_3$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de suites de la forme  $\partial_3^{m''} \partial_2^{m'} \partial_1^m$ .*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que tous les  $\delta \in \mathfrak{H}_3$  peuvent s'écrire comme  $\delta = \lambda_1 \partial_1 + \lambda_2 \partial_2 + \lambda_3 \partial_3$ , où  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ . Nous pouvons donc décomposer la suite  $\delta_1 \cdots \delta_n$  en une combinaison linéaire de  $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n}$ , avec  $i_j \in \{1, 2, 3\}$ .

Il suffit ensuite d'utiliser les relations de commutations (3.10) pour réorganiser les suites finies ci-dessus, de façon à les mettre sous la forme proposée.  $\square$

**Lemme 3.84.** *Quels que soient les entiers  $m, m'$ , nous avons l'estimation :*

$$\|\partial_3^{m''} \partial_2^{m'} \partial_1^m (\eta_i^p)\| \leq C(1 + |p|)^{m' + m''},$$

valable pour une certaine constante  $C$  indépendante de  $p$ .

*Démonstration.* Notons tout d'abord que  $\partial_2^{m'} \partial_1^m (\eta_i^p)$  est un élément homogène de degré  $p$ . L'action de  $\partial_3^{m''}$  est donc juste de multiplier l'élément par  $(i2\pi p)^{m''}$ .

D'autre part,  $\partial_2^{m'} \partial_1^m (\eta_i^p) \in M_{p\mu, p\nu}^{pc}$  et la valeur absolue de cette fonction est donc un élément de  $C(T^2)$ . Il suffit donc de majorer la valeur absolue sur un domaine fondamental pour estimer la norme de  $\partial_2^{m'} \partial_1^m (\eta_i^p)$ .

Pour faire l'estimation, nous aurons recours à la forme explicite des  $\eta_i^p$  ainsi qu'à un domaine fondamental adapté. Par construction, la restriction de  $\eta_1^p$  à  $[-1/2, 1/2] \times S^1$  est  $\eta_1^p(x, y) = \chi_1(x)$  où  $\chi_1$  est définie dans le lemme A.1.

Nous en déduisons qu'en se restreignant à  $(x, y) \in [-1/2, 1/2] \times S^1$ , nous avons :

$$\partial_1^m \eta_1^n(x, y) = \chi_1^{(m)}(x),$$

où  $\chi_1^{(m)}$  est la dérivée  $m^e$  de  $\chi_1$ . Nous pouvons appliquer ensuite la dérivation  $\partial_2$ , qui nous donne :

$$\partial_2^{m'} \partial_1^m \eta_1^p(x, y) = (-i2\pi cpx)^{m'} \chi_1^{(m)}(x),$$

car  $\chi_1$  ne dépend pas de  $y$ . Comme  $x \in [-1/2, 1/2]$ , nous obtenons la majoration :

$$\|\partial_2^{m'} \partial_1^m (\eta_1^p)\| \leq C(1 + |p|)^{m'} \|\chi_1^{(m)}\|_\infty.$$

Un raisonnement similaire sur le domaine fondamental  $[0, 1] \times S^1$  permet de prouver une estimation analogue pour  $\xi_2^p$ .  $\square$

**Corollaire 3.85.** *L'algèbre  $\mathcal{D}$  s'inscrit dans la suite exacte courte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{D} \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  est la sous-algèbre générée dans le produit tensoriel projectif  $\mathcal{D} \hat{\otimes} \mathcal{T}$  par  $a \otimes 1$ ,  $S_\xi \otimes S$  et  $\bar{S}_\xi \otimes \bar{S}$  où  $a \in \mathcal{A}$  et  $\xi \in \mathcal{M}$ . L'application  $\pi$  est définie sur les générateurs par :

$$\pi(a \otimes 1) = a \quad \pi(S_\xi \otimes S) = \xi \quad \pi(\bar{S}_\xi \otimes \bar{S}) = \xi^*.$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 2.29.  $\square$

### 3.5.3 Dimensions et bases de $HP^*(\mathcal{D})$

À partir de cette suite exacte courte, l'article [25] nous assure de l'existence d'un hexagone en cohomologie cyclique périodique :

$$\begin{array}{ccccc} HP^0(\mathcal{C}) & \longleftarrow & HP^0(\mathcal{T}_{\mathcal{M}}) & \xleftarrow{\pi^*} & HP^0(\mathcal{D}) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ HP^1(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\pi^*} & HP^1(\mathcal{T}_{\mathcal{M}}) & \longrightarrow & HP^1(\mathcal{C}). \end{array} \quad (3.30)$$

Comme les théorèmes 2.37 et 2.43 nous assurent de l'existence d'équivalences de cohomologie cyclique périodique  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{A}$  et  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{A}$ , soit

$$HP^0(\mathcal{C}) = HP^0(\mathcal{T}_{\mathcal{M}}) = HP^0(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \quad (3.31)$$

$$HP^1(\mathcal{C}) = HP^1(\mathcal{T}_{\mathcal{M}}) = HP^1(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2. \quad (3.32)$$

En outre, l'inclusion  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  induit un isomorphisme au niveau de la  $K$ -théorie – conformément au théorème 2.43. Ainsi, les unitaires  $V_i = U_i \otimes 1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  forment un ensemble générateur de  $K_1(\mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ , et si  $E$  est un *projecteur* de  $M_n(\mathcal{A})$  dont la dimension est  $d = 1$  et le gauchissement est  $t = 1$ , alors  $1 \otimes 1$  et  $E \otimes 1$  forment un ensemble de générateurs de  $K_0(\mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ . Ces générateurs *séparent* les cocycles cycliques périodiques.

Évaluons maintenant l'image de  $\pi^*$  en calculant les appariements sur  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ . Dans le cas impair,

$$\langle V_i, \pi^* \varphi_j \rangle = \langle \pi_*(V_i), \varphi_j \rangle = \langle U_i, \varphi_j \rangle$$

renforcé de (3.31) prouve que  $(\pi^* \varphi_j)_{j=1,2}$  est une base de  $HP^1(\mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ .

Dans le cas pair, notre analyse de l'application  $\text{Id} - [M^c]$  nous assure que  $K_0(\mathcal{D})$   $\iota(E) \ominus \iota(1)$  est un élément de torsion et donc que  $\langle \iota(E) \ominus \iota(1), \psi \rangle = 0$ . Nous avons ici utilisé  $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}$  pour distinguer  $E \in K_0(\mathcal{A})$  de  $\iota(E) \in K_0(\mathcal{D})$ . La définition de  $\pi$  garantit que  $\pi(E \otimes 1) = \iota(E)$  et  $\pi(1 \otimes 1) = \iota(1)$ . La bilinéarité implique

$$\langle E \otimes 1, \pi^* \psi \rangle = \langle \iota(E), \psi \rangle = \langle \iota(1), \psi \rangle = \langle 1 \otimes 1, \pi^* \psi \rangle.$$

Comme  $1 \otimes 1$  et  $E \otimes 1$  séparent  $HP^*(\mathcal{A})$ , nous voyons que  $\pi^*(HP^0(\mathcal{D}))$  est de dimension au plus 1. Il est facile de vérifier sur la trace que l'image est non nulle, ce qui détermine la dimension.

En introduisant ces résultats dans l'hexagone (3.30), nous obtenons :

**Proposition 3.86.** *La cohomologie cyclique périodique de  $\mathcal{D}$  est donnée par :*

$$HP^0(\mathcal{D}) = \mathbb{C}^3 \qquad HP^1(\mathcal{D}) = \mathbb{C}^3.$$

Cependant, la proposition 3.36 exhibait 7 cocycles cycliques. Les tableaux (3.14) et (3.18) nous permettent d'extraire de ces cocycles cycliques une famille libre. Remarquons que l'appariement  $\langle [K], [\varphi] \rangle$  dépend uniquement de la classe de  $\varphi$  en *cohomologie cyclique périodique* – grâce à la compatibilité  $\langle [K], [S\varphi] \rangle = \langle [K], [\varphi] \rangle$  – et qu'ainsi cette famille est libre dans  $HP^*(\mathcal{D})$ . Ainsi, nous avons :

**Théorème 3.87.** *En reprenant les notations de la proposition 3.36,*

- la famille  $(\tau, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,3})$  est une base de  $HP^0(\mathcal{D})$  ;
- la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,2,3})$  est une base de  $HP^1(\mathcal{D})$ .

En utilisant d'une part les appariements de Chern-Connes sur  $\mathcal{A}$  et d'autre part  $HP^0(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2$ , nous voyons que la trace  $\tau_0$  (voir la proposition 3.15) et le cocycle cyclique  $\psi_{1,2}$  engendrent  $HP^0(\mathcal{A})$ . Partant, dans le cas des variétés de Heisenberg quantiques on peut identifier explicitement la flèche  $\#: HP^0(\mathcal{A}) \rightarrow HP^1(\mathcal{D})$  du théorème 2.45.

**Proposition 3.88.** *La relation  $\forall U \in K_1(D), \psi \in HP^0(\mathcal{A})$ ,*

$$i2\pi \langle \partial U, \psi \rangle = \langle U, \# \psi \rangle$$

*définit de façon unique une application  $\#: HP^0(\mathcal{A}) \rightarrow HP^1(\mathcal{D})$ .*

*En particulier, cette application coïncide avec le  $\#$  du théorème 2.45.*

*Démonstration*

Le théorème 3.87 d'une part et le tableau (3.18) d'autre part montrent que  $\#\psi$  est défini de façon unique par ses appariements avec  $K_1(\mathcal{D})$ . Ceci justifie l'unicité. Pour l'existence, le corollaire 3.80 montre qu'il suffit de prendre

$$\#\tau_0 = 0 \qquad \qquad \qquad \#\psi_{1,2} = -3\sqrt{i2\pi} \varphi_{1,2,3}.$$

La proposition 3.82 montre que nous pouvons appliquer la remarque 2.46 à  $\mathcal{D}$  et identifier  $k_1(\mathcal{D})$  avec  $K_1(D)$ . Par unicité, la flèche de bord  $HP^0(\mathcal{A}) \rightarrow HP^1(\mathcal{D})$  du diagramme (2.6) est donc égale à l'application  $\#$  définie ci-dessus.  $\square$





## Annexe A

# Compléments divers

### A.1 Partitions de l'unité

Pour l'existence de fonctions de base pour les bimodules  $M_{\mu,\nu}^c$ , nous utilisons une variante du lemme 3.1 de [3].

**Lemme A.1.** *Il existe deux fonctions  $\chi_1, \chi_2$  dans  $C^\infty(S^1 \rightarrow \mathbb{R})$  telles que*

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1,$$

*et les supports vérifient :*

$$\text{Supp } \chi_1 \subseteq \overline{[-1/4 - \varepsilon, 1/4 + \varepsilon]} \quad \text{Supp } \chi_2 \subseteq \overline{[1/4 - \varepsilon, 3/4 + \varepsilon]}.$$

où  $\widehat{I}$  est l'image de l'intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$  dans le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ .

*Démonstration*

Nous supposons  $S^1$  réalisé comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Partons des fonctions créneaux  $\chi_{[-1/4, 1/4]}$  et  $\chi_{[1/4, 3/4]}$ . Nous pouvons faire le produit de convolution avec une fonction cloche  $\varphi$  suffisamment concentrée pour que le support de  $f_1 = \chi_{[-1/4, 1/4]} \star \varphi$  (resp. de  $f_2 = \chi_{[1/4, 3/4]} \star \varphi$ ) soit inclus dans  $[-1/4 - \epsilon, 1/4 + \epsilon]$  (resp. dans  $[1/4 - \epsilon, 3/4 + \epsilon]$ ).

Par construction,  $f_1 + f_2 = 1$  et  $0 \leq f_i(x) \leq 1$  pour tous  $x \in \mathbb{R}$ . Nous en déduisons que  $0 < f_1^2 + f_2^2 \leq 1$ , puis que les fonctions  $\chi_i = \frac{f_i}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$  sont  $C^\infty$  et vérifient :

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} = 1.$$

Vu la construction, les conditions sur les supports sont satisfaites.  $\square$

## A.2 Forme volume sur $D$

### A.2.1 Condition de cocycle

Partons de l'antisymétrisé  $v_i$  de  $\xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2 \otimes \xi_i$ , nous devons ensuite faire la somme des  $v_i$ . Nous avons

$$\begin{aligned} v_i = & \xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2 \otimes \xi_i \\ & + U_2^* U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_1 \otimes U_2 \\ & + U_1^* \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \otimes \xi_i \otimes U_1 \\ & - \xi_i^* U_1^* U_2^* \otimes U_2 \otimes U_1 \otimes \xi_i \\ & - U_1^* U_2^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_2 \otimes U_1 \\ & - U_2^* \xi_i^* U_1^* \otimes U_1 \otimes \xi_i \otimes U_2. \end{aligned}$$

Les premiers et derniers termes du bord sont :

$$\begin{aligned} & \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \otimes \xi_i - \xi_i \xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2 \\ & + U_2^* U_1^* \xi_i^* \xi_i \otimes U_1 \otimes U_2 - U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_1 \\ & + U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_1 - \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \otimes \xi_i \\ & - \xi_i^* U_1^* \otimes U_1 \otimes \xi_i + \xi_i \xi_i^* U_1^* U_2^* \otimes U_2 \otimes U_1 \\ & - U_1^* U_2^* \xi_i^* \xi_i \otimes U_2 \otimes U_1 + U_2^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_2 \\ & - U_2^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_2 + \xi_i^* U_1^* \otimes U_1 \otimes \xi_i. \end{aligned}$$

Pour les termes en  $\xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \otimes \xi_i$ ,  $U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_1$  et  $\xi_i^* U_1^* \otimes U_1 \otimes \xi_i$ ,  $U_2^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_2$ , la somme est nulle. Il reste

$$\begin{aligned} & -\xi_i \xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2 + U_2^* U_1^* \xi_i^* \xi_i \otimes U_1 \otimes U_2 \\ & + \xi_i \xi_i^* U_1^* U_2^* \otimes U_2 \otimes U_1 - U_1^* U_2^* \xi_i^* \xi_i \otimes U_2 \otimes U_1. \end{aligned}$$

En faisant alors la somme des  $v_i$  puis en utilisant  $\sum_i \xi_i^* \xi_i = \sum_i \xi_i \xi_i^* = 1$ , il apparaît clairement que la somme *des premiers et derniers termes de bords est nulle*. Reste alors à calculer la somme des seconds et troisièmes termes de bord :

$$\begin{aligned} & -\xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 U_2 \otimes \xi_i + \xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2 \xi_i \\ & - U_2^* U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i U_1 \otimes U_2 + U_2^* U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_1 U_2 \\ & - U_1^* \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \xi_i \otimes U_1 + U_1^* \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \otimes \xi_i U_1 \\ & + \xi_i^* U_1^* U_2^* \otimes U_2 U_1 \otimes \xi_i - \xi_i^* U_1^* U_2^* \otimes U_2 \otimes U_1 \xi_i \\ & + U_1^* U_2^* \xi_i^* \otimes \xi_i U_2 \otimes U_1 - U_1^* U_2^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_2 U_1 \\ & + U_2^* \xi_i^* U_1^* \otimes U_1 \xi_i \otimes U_2 - U_2^* \xi_i^* U_1^* \otimes U_1 \otimes \xi_i U_2. \end{aligned}$$

Pour la suite, nous allons utiliser  $U_2^* U_1^* \otimes U_1 U_2 = U_1^* U_2^* \otimes U_2 U_1$  et  $\xi_i^* U_j^* \otimes U_j \xi_i = U_j^* \xi_i^* \otimes \xi_i U_j$ . La première provient de ce que les  $U_i$  commutent (mais elle serait également vérifiée sur un tore non-commutatif), la seconde est une conséquence immédiate de (3.12). En effet, pour  $a \in C(T^2)$  on obtient

$$e^{-i4\pi\mu} U_1 \xi = \xi U_1 \quad e^{-i4\pi\nu} U_2 \xi = \xi U_2$$

en reprenant les notation du corollaire 3.35. Un passage à l'étoile dans les égalités ci-dessus prouve que la relation  $\xi_i^* U_j^* \otimes U_j \xi_i = U_j^* \xi_i^* \otimes \xi_i U_j$  est vérifiée.

En utilisant les propriétés ci-dessus, il apparaît que la somme des termes en  $\xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 U_2 \otimes \xi_i$ ,  $U_2^* U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i \otimes U_1 U_2$ ,  $\xi_i^* U_2^* U_1^* \otimes U_1 \otimes U_2 \xi_i$ ,  $U_2^* U_1^* \xi_i^* \otimes \xi_i U_1 \otimes U_2$ ,  $U_1^* \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \xi_i \otimes U_1$  et  $U_1^* \xi_i^* U_2^* \otimes U_2 \otimes \xi_i U_1$  est nulle.

Nous avons donc prouvé que  $\sum_i v_i$  est bien un cocycle de Hochschild.

### A.2.2 Appariement avec $\varphi_{1,2,3}$

Nous voulons évaluer le cycle de Hochschild

$$\sum_i \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \varepsilon(\sigma) U_{i,\sigma(3)}^* U_{i,\sigma(2)}^* U_{i,\sigma(1)}^* \otimes U_{i,\sigma(1)} \otimes U_{i,\sigma(2)} \otimes U_{i,\sigma(3)},$$

où  $U_{i,j} = \begin{cases} U_1 & \text{si } j = 1 \\ U_2 & \text{si } j = 2 \\ \xi_i & \text{si } j = 3 \end{cases}$ , sur le cocycle cyclique  $\varphi_{1,2,3}$  de la proposition 3.36. Explicitement,

$$\left\langle \varphi_{1,2,3}, \sum_i v_i \right\rangle = \sum_i \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \sum_{\sigma' \in \Sigma_3} \varepsilon(\sigma') \varepsilon(\sigma) \tau(U_{i,\sigma(3)}^* U_{i,\sigma(2)}^* U_{i,\sigma(1)}^* \partial_{\sigma'(1)} U_{i,\sigma(1)} \partial_{\sigma'(2)} U_{i,\sigma(2)} \partial_{\sigma'(3)} U_{i,\sigma(3)}).$$

Fixons  $\sigma$  et  $\sigma'$  et étudions le terme :

$$\tau(U_{i,\sigma(3)}^* U_{i,\sigma(2)}^* U_{i,\sigma(1)}^* \partial_{\sigma'(1)} U_{i,\sigma(1)} \partial_{\sigma'(2)} U_{i,\sigma(2)} \partial_{\sigma'(3)} U_{i,\sigma(3)}).$$

Nous pouvons remarquer que  $\partial_3 U_{i,j} = -\delta_{3,j} i 2\pi U_{i,j}$ . Il existe  $i_3$  tel que  $\sigma(i_3) = 3$ . Il est nécessaire que  $\sigma'(i_3) = 3 = \sigma(i_3)$  pour que le terme considéré soit non nul.

De la même façon  $\partial_2 U_{i,j} = -\delta_{2,j} i 2\pi U_{i,j}$  impose  $\sigma'(i_2) = 2 = \sigma(i_2)$ , et nous en déduisons qu'il est nécessaire que  $\sigma = \sigma'$  pour que le terme soit non nul ! Notons que dans ces conditions,  $\partial_1 U_{i,j} = -\delta_{1,j} i 2\pi U_{i,j}$ .

Il nous reste alors

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi_{1,2,3}, \sum_i v_i \right\rangle &= (-i2\pi)^3 \sum_i \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \tau(U_{i,\sigma(3)}^* U_{i,\sigma(2)}^* U_{i,\sigma(1)}^* U_{i,\sigma(1)} U_{i,\sigma(2)} U_{i,\sigma(3)}) = \\ &= (-i2\pi)^3 \sum_i \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \tau(\xi_i^* \xi_i) = (-i2\pi)^3 6 \neq 0, \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de trace de  $\tau$ .

### A.3 Des algèbres de Pimsner aux algèbres de Toeplitz

Pour cette annexe, nous nous situons dans le cadre des algèbres de Pimsner  $\mathcal{O}_E$  définies dans l'article [41]. La définition de PIMSNER a été étendue dans [32, 33], de façon à englober les produits croisés généralisés. Dans [41], il est prouvé que les algèbres de Pimsner et leurs algèbres de Toeplitz associées entrent dans une suite exacte (voir théorème 3.13 de [41]). Nous voulons ici prouver que l'algèbre de Toeplitz  $\mathcal{T}_E$  associée à une algèbre de Pimsner  $\mathcal{O}_E$  donnée peut s'écrire comme sous-algèbre de  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_E$ , où  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  est l'algèbre de Toeplitz « ordinaire ».

La définition des algèbres de Pimsner donnée par KATSURA nécessite l'idéal suivant :

**Définition A.2** (idéal  $J_E$  – définition 3.2 de [33]). Si  $E$  est une  $C^*$ -correspondance sur  $A$ , on définit un idéal  $J_E$  de  $A$  en posant :

$$J_E = \phi_E^{-1}(\mathcal{K}(E)) \cap (\ker \phi_E)^\perp = \{a \in A \mid \phi_E(a) \in \mathcal{K}(E) \text{ et } \forall b \in \ker \phi_E, ab = 0\}.$$

Dans cette définition, nous avons utilisé la notation  $\phi_E$  de la définition 1.29.

Rappelons qu'une représentation  $(\pi, \tau)$  d'une  $C^*$ -correspondance  $E$  étant donnée, le lemme 1.40 donne un sens à l'homomorphisme  $\pi^{(1)}: \mathcal{K}(E) \rightarrow B$ . Nous reprenons alors la définition 3.3 de [33] :

**Définition A.3** (représentation  $J_E$ -co-isométrique). Une représentation  $(\pi, \tau)$  est dite  $J_E$ -co-isométrique si  $\pi(a) = \pi^{(1)}(\phi_E(a))$  pour tout  $a \in J_E$ .

Nous pouvons énoncer la définition 3.5 de [33] :

**Définition A.4** (algèbre de Pimsner – au sens de Katsura). Si  $E$  est une  $C^*$ -correspondance sur une  $C^*$ -algèbre  $A$ , l'algèbre de Pimsner  $\mathcal{O}_E$  est la  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par les représentations  $J_E$ -co-isométriques.

La définition de  $\mathcal{O}_E$  étant donnée, nous pouvons prouver l'isomorphisme entre  $\mathcal{T}_E$  et une sous-algèbre de  $\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{T}$  :

**Proposition A.5.** Soit  ${}_A E_A$  une  $C^*$ -correspondance. Nous pouvons définir une représentation  $(\pi, \tau)$  de  $E$  sur  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_E$  par :

$$\pi(a) = a \otimes 1 \qquad \tau(\xi) = S_\xi \otimes S.$$

Celle-ci induit un isomorphisme  $\Phi: \mathcal{T}_E \longrightarrow C^*(\pi, \tau)$ .

Comme l'algèbre de Toeplitz  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  est nucléaire, nous pouvons écrire  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_E$  sans préciser la norme (de  $C^*$ -algèbre) considérée.

*Démonstration.* Vérifions que  $(\pi, \tau)$  est bien une représentation :

- (i)  $\tau(\xi)^* \tau(\zeta) = (S_\xi^* \otimes S^*)(S_\zeta \otimes S) = \langle \xi, \zeta \rangle \otimes 1 = \pi(\langle \xi, \zeta \rangle)$ ;
- (ii) ce point est une conséquence de (i) (voir la remarque 1.32) ;

$$(iii) \quad \pi(a)\tau(\xi) = (a \otimes 1)(S_\xi \otimes S) = aS_\xi \otimes S = S_{\phi(a)\xi} \otimes S = \tau(\phi(a)\xi).$$

Nous en déduisons qu'il existe un homomorphisme  $\Phi: \mathcal{T}_E \rightarrow \mathcal{O}_E \otimes \mathcal{T}_\mathbb{C}$ , donné sur les générateurs par :

$$\Psi(a) = a \otimes 1 \qquad \Psi(\mathcal{T}_\xi) = S_\xi \otimes S.$$

Pour prouver que cet homomorphisme est un isomorphisme, utilisons le théorème 1.43. Dans le cas de la représentation  $(\pi, \tau)$ ,

$$\tau(\xi)\tau(\zeta)^* = S_\xi S_\zeta^* \otimes SS^* = S_\xi S_\zeta^* \otimes (1 - P)$$

et donc  $\text{Im } \pi^{(1)} \subseteq \mathcal{O}_E^{(0)} \otimes (1 - P)$ . Comme l'image de  $A$  par  $\pi$  est  $A \otimes 1$ ,  $\text{Im } \pi \cap \text{Im } \pi^{(1)} = \{0\}$  et  $I'_{(\pi, \tau)} = 0$ .

On peut définir une action  $\tilde{\beta}: S^1 \curvearrowright \mathcal{O}_E \otimes \mathcal{T}_\mathbb{C}$  par

$$\tilde{\beta}_t(F \otimes S^n) = e^{i2\pi nt} F \otimes S^n,$$

où  $F \in \mathcal{O}_E^{(n)}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

On obtient alors une action de jauge  $\beta$  pour  $C^*(\pi, \tau)$  par restriction de  $\tilde{\beta}$  :

$$\beta_t(\pi(a)) = \beta_t(a \otimes 1) = \pi(a) \qquad \beta_t(\tau(\xi)) = \beta_t(S_\xi \otimes S) = e^{i2\pi t} S_\xi \otimes S = e^{i2\pi t} \tau(\xi).$$

En conséquence,  $\Phi: \mathcal{T}_E \rightarrow C^*(\pi, \tau)$  est un isomorphisme.  $\square$

La proposition précédente nous permet de donner une réalisation particulière de la suite exacte (voir [41] et [33]) :

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(E_{+, J_E}) \rightarrow \mathcal{T}_E \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0. \quad (\text{A.1})$$

Nous obtenons cette réalisation en notant  $p: \mathcal{T}_\mathbb{C} \rightarrow C(S^1)$  l'application de passage au quotient  $p(S) = U$ , où  $U$  est la fonction  $e^{i2\pi \cdot}$  de  $C(S^1)$ . On peut alors définir un homomorphisme  $\text{Id} \otimes p: \mathcal{O}_E \otimes \mathcal{T}_\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_E \otimes C(S^1)$  et noter  $\underline{p}$  sa restriction à  $C^*(\pi, \tau)$ , ce qui nous donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow \ker \underline{p} \rightarrow C^*(\pi, \tau) \xrightarrow{\underline{p}} C \rightarrow 0, \quad (\text{A.2})$$

où  $C \subseteq \mathcal{O}_E \otimes C(S^1)$  est l'image de  $C^*(\pi, \tau)$  par  $p$ . En utilisant le théorème d'invariance de jauge pour les algèbres de Pimsner (théorème 6.4 de [33]), il n'est pas difficile de prouver que l'algèbre  $C$  obtenue ci-dessus est en fait isomorphe à  $\mathcal{O}_E$ , ce qui prouve que la suite exacte (A.2) n'est en fait qu'une réalisation particulière de (A.1).

## A.4 Bimodule hilbertien lisse : contre-exemple

Dans cette annexe, nous allons exhiber un *bimodule* hilbertien sur lequel un groupe de Lie  $G$  agit par une action de *module* hilbertien (définition 1.67), sans que l'on puisse étendre cette action en une action de *bimodule* hilbertien (définition 1.71).

Partons de la  $C^*$ -algèbre  $A = C(S^1)$  sur laquelle  $G = S^1$  agit de façon canonique. Notre contre-exemple sera le bimodule hilbertien associé à une action continue mais non-lisse, comme le  $\sigma$  considéré ci-dessous.

**Définition A.6.** On peut définir un bimodule hilbertien  ${}_A E_A$  sur  $A$  associé à l'automorphisme  $\sigma$  de  $A$  :

$$\sigma(a)(t) = \begin{cases} a(3/2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2 \\ a(1/2(1+t)) & \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Plus explicitement, prenons  $E = A$  comme module hilbertien à droite, et définissons

- une action de  $A$  à gauche par multiplication par  $\sigma(a)$  avec (pour  $t \in [0, 1]$ ) :
- un produit scalaire à gauche par :  ${}_A \langle \xi, \eta \rangle(t) = \sigma^{-1}(\xi(t)\overline{\eta(t)})$ .

Il est facile de démontrer que dans ces conditions,  $E$  est en fait un bimodule d'équivalence de Morita.

Le bimodule hilbertien  $E$  est doté d'une action de *module* hilbertien de  $G = S^1$  qui est donnée par

$$\beta_u(\xi)(t) = \xi(t+u) \qquad \alpha_u(a)(t) = a(t+u).$$

Si cette action pouvait s'étendre en une action de *bimodule* hilbertien sur  $E$ , alors les éléments  $G$ -lisses de  $E$ , c'est-à-dire  $\mathcal{E} = C^\infty(S^1)$ , seraient stables par multiplication à gauche par les éléments  $G$ -lisses de  $A$ , soit  $\mathcal{A} = C^\infty(S^1)$ .

Or, il est clair que  $1 \in E$  est  $G$ -lisse, tout comme  $U = (t \mapsto e^{it}) \in A$ . Pourtant, par construction de  $\sigma$ ,  $U \cdot 1 = \sigma(U)$  qui n'est pas dans  $\mathcal{E} = C^\infty(S^1)$ .

# Bibliographie

- [1] Beatriz ABADIE : “Vector bundles” over quantum Heisenberg manifolds. *In Algebraic methods in Operator Theory*, pages 307–315. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.
- [2] Beatriz ABADIE : Generalized fixed-point algebras of certain actions on crossed products. *Pacific Journal of Mathematics*, 171(1):1–21, 1995.
- [3] Beatriz ABADIE : The range of traces on quantum Heisenberg manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(12):5767–5780 (electronic), 2000.
- [4] Beatriz ABADIE : Morita equivalence for quantum Heisenberg manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133(12):3515–3523 (electronic), mars 2005.
- [5] Beatriz ABADIE et Mauricio ACHIGAR : Cuntz-Pimsner  $C^*$ -algebras and crossed products by Hilbert  $C^*$ -bimodules. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 39(4):1051–1081, 2009.
- [6] Beatriz ABADIE, Søren EILERS et Ruy EXEL : Morita equivalence for crossed products by Hilbert  $C^*$ -bimodules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350:3043–3054, 1998.
- [7] Beatriz ABADIE et Ruy EXEL : Hilbert  $C^*$ -bimodules over commutative  $C^*$ -algebras and an isomorphism condition for quantum Heisenberg manifolds. *Reviews in Mathematical Physics. A Journal for Both Review and Original Research Papers in the Field of Mathematical Physics*, 9:411–423, 1997.
- [8] Jean BELLISSARD, Matilde MARCOLLI et Kamran REIHANI : Dynamical systems on spectral metric spaces. <http://arxiv.org/abs/1008.4617>, soumis au *Journal of Noncommutative Geometry*, août 2010.
- [9] Bruce BLACKADAR : *Operator algebras*, volume 122 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Theory of  $C^*$ -algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.
- [10] Partha Sarathi CHAKRABORTY : Metrics on the quantum Heisenberg manifold. *Journal of Operator Theory*, 54(1):93–100, 2005.
- [11] Partha Sarathi CHAKRABORTY et Kalyan SINHA : Geometry on the quantum Heisenberg manifold. *Journal of Functional Analysis*, 203(2):425–452, 2003.



- [12] Alain CONNES :  $C^*$ -algèbres et géométrie différentielle. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 290 A-2:599–604, 1980.
- [13] Alain CONNES : Noncommutative differential geometry. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (62):257–360, 1985.
- [14] Alain CONNES : *Géométrie non commutative*. InterEditions, Paris, 1990.
- [15] Alain CONNES : *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [16] Alain CONNES : Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry. *Commun. Math. Phys.*, 182:155–176, 1996.
- [17] Alain CONNES : On the spectral characterization of manifolds. preprint, <http://arxiv.org/abs/0810.2088>, mai 2007.
- [18] Alain CONNES et Michel DUBOIS-VIOLETTE : Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples. *Communications in Mathematical Physics*, 230(3):539–579, 2002.
- [19] Alain CONNES et Michel DUBOIS-VIOLETTE : Noncommutative finite dimensional manifolds. II. Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres. *Communications in Mathematical Physics*, 281(1):23–127, 2008.
- [20] Joachim CUNTZ : Generalized homomorphisms between  $C^*$ -algebras and  $KK$ -theory. In *Dynamics and Processes*, volume 1031 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 31–45. Springer, Berlin, 1983.
- [21] Joachim CUNTZ :  $K$ -theory and  $C^*$ -algebras. In *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*, volume 1046 de *Lecture Notes in Mathematics*, page 55–79. Springer, Berlin, 1984.
- [22] Joachim CUNTZ : A new look at  $KK$ -theory. *K-Theory*, 1(1):31–51, 1987.
- [23] Joachim CUNTZ : Bivariante  $K$ -Theorie für lokalkonvexe algebren und der Chern-Connes-Charakter. *Documenta Mathematica*, 2:139–182 (electronic), 1997.
- [24] Joachim CUNTZ : Bivariant  $K$ -theory and the Weyl algebra. *K-Theory. An Interdisciplinary Journal for the Development, Application, and Influence of K-Theory in the Mathematical Sciences*, 35(1-2):93–137, 2005.
- [25] Joachim CUNTZ et Daniel QUILLEN : Excision in bivariant periodic cyclic cohomology. *Inventiones Mathematicae*, 127(1):67–98, 1996.
- [26] Joachim CUNTZ, Georges SKANDALIS et Boris TSYGAN : *Cyclic homology in noncommutative geometry*, volume 121 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, II.
- [27] Joachim CUNTZ et Andreas THOM : Algebraic  $K$ -theory and locally convex algebras. *Mathematische Annalen*, 334(2):339–371, 2006.
- [28] Neal FOWLER, Paul MUHLY et Iain RAEBURN : Representations of Cuntz-Pimsner algebras. *Indiana University Mathematics Journal*, 52(3):569–605, 2003.

- [29] Tsuyoshi KAJIWARA, Claudia PINZARI et Yasuo WATATANI : Ideal structure and simplicity of the  $C^*$ -algebras generated by Hilbert bimodules. *Journal of Functional Analysis*, 159(2):295–322, 1998.
- [30] Sooran KANG : The Yang-Mills functional and Laplace's equation on quantum Heisenberg manifolds. *Journal of Functional Analysis*, 258(1):307–327, janvier 2010.
- [31] Irving KAPLANSKY : Modules over operator algebras. *American Journal of Mathematics*, 75:839–858, 1953.
- [32] Takeshi KATSURA : A construction of  $C^*$ -algebras from  $C^*$ -correspondences. In *Advances in quantum dynamics (South Hadley, MA, 2002)*, volume 335 de *Contemp. Math.*, pages 173–182. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [33] Takeshi KATSURA : On  $C^*$ -algebras associated with  $C^*$ -correspondences. *Journal of Functional Analysis*, 217(2):366–401, 2004.
- [34] Takeshi KATSURA : Ideal structure of  $C^*$ -algebras associated with  $C^*$ -correspondences. *Pacific Journal of Mathematics*, 230(1):107–145, 2007.
- [35] Alex KUMJIAN : Quantum Heisenberg manifolds as twisted groupoid  $C^*$ -algebras. Diaporama sur le site de A. Kumjian, communiqué par J. Renault. "<http://wolfweb.unr.edu/homepage/alex/pub/gfest10.pdf>", 2010.
- [36] Christopher LANCE : *Hilbert  $C^*$ -modules*, volume 210 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. A toolkit for operator algebraists.
- [37] Jean-Louis LODAY : *Cyclic homology*, volume 301 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1998. Appendix E by Maria O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [38] Ryszard NEST : Cyclic cohomology of crossed products with  $\mathbb{Z}$ . *Journal of Functional Analysis*, 80(2):235–283, 1988.
- [39] Victor NISTOR : Higher index theorems and the boundary map in cyclic cohomology. *Documenta Mathematica*, 2:263–295 (electronic), 1997.
- [40] William PASCHKE : Inner product modules over  $B^*$ -algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 182:443–468, 1973.
- [41] Michael PIMSNER : *A class of  $C^*$ -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by  $\mathbb{Z}$* , volume 12 de *Fields Inst. Commun.*, pages 189–212. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [42] Claudia PINZARI : The ideal structure of Cuntz-Krieger-Pimsner algebras and Cuntz-Krieger algebras over infinite matrices. In *Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996)*, pages 136–150. Int. Press, Cambridge, MA, 1997.
- [43] Marc RIEFFEL : Induced representations of  $C^*$ -algebras. *Advances in Mathematics*, 13:176–257, 1974.
- [44] Marc RIEFFEL : The cancellation theorem for projective modules over irrational rotation  $C^*$ -algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series*, 47(2):285–302, 1983.

- 
- [45] Marc RIEFFEL : Deformation quantization of Heisenberg manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 122(4):531–562, 1989.
  - [46] François TRÈVES : *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, New York, 1967.
  - [47] Joseph VARILLY, Hector FIGUEROA et Jose GRACIA-BONDIA : *Elements of Non-commutative Geometry*. Birkhäuser Boston, 1 édition, octobre 2000.
  - [48] Nik WEAVER : Sub-Riemannian metrics for quantum Heisenberg manifolds. *Journal of Operator Theory*, 43(2):223–242, 2000.

# Index des définitions

- Action
  - de bimodule hilbertien, 37
  - de module, 34
  - de module hilbertien, 34
- Action de jauge, 21
  - algèbre de Toeplitz, 27
- Algèbre
  - de base, 26
  - de Fréchet, 20
  - localement convexe, 20
- Algèbre de Toeplitz
  - action de jauge, 27
  - algèbre de base, 26
  - algèbre des coefficients, 26
  - généralisée, 26
  - graduation, 27
  - lisse, 47
  - mots réduits, 26
- Algèbre de Toeplitz-Pimsner, 26
  - lisse, 50
- Algèbre différentielle
  - d'une action de groupe de Lie, 33
- Automorphisme
  - de  $C^*$ -correspondance, 26
- Base de semi-normes continues, 18
- Bicontexte de Morita, 44
- Bimodule hilbertien, 28
  - action de, 37
  - dual, 28
  - opposé, 28
  - représentation de, 29
- $C^*$ -bimodule, 28
- $C^*$ -correspondance, 24
  - automorphisme de, 26
  - représentation, 25
- $C^*$ -module, 23
- Caractère
  - d'un cycle, 33
- Cocycle
  - cyclique, 32
  - de Hochschild, 78
- Coefficients de Fourier, 21
- Cohomologie
  - cyclique, 32
  - cyclique périodique, 79
  - de Hochschild, 77
- Compact lisse
  - opérateur, 42
- Connexion, 34
- Contexte de Morita, 43
- Cycle, 32
  - caractère, 33
  - de Hochschild, 78
- Cylindre sur  $\mathcal{A}$ , 42
- Dérivation
  - auto-adjointe, 33
- Difféotopie, 42
- Difféotopie-invariant
  - foncteur, 43
- Élément  $G$ -régulier, 31
- Élément jauge-régulier, 31
- Espérance conditionnelle, 21
- Espace localement convexe, 18
- Espace topologique

- Hausdorff, 18
- séparé, 17
- Espace vectoriel
  - localement convexe, voir Espace localement convexe
- Foncteur
  - $\mathcal{K}$ -stable, 43
  - invariant sous difféotopie, 43
  - semi-exact, 48
  - split exact, 43
- Fréchet
  - algèbre de, 20
- Gauchissement, 64
- Générateur infinitésimal, 33
- Groupe de Heisenberg, 70
- Homologie
  - de Hochschild, 78
- Jauge-dérivable, 22
- $\mathcal{K}$ -stable
  - foncteur, 43
- Lisse
  - sous-algèbre, 31
- $m$ -algèbre, 20
- Module hilbertien
  - à droite, 23
  - à gauche, 23
  - action de, 34
  - opérateur
    - compact, 23
    - opérateur à adjoint, 23
    - plein, 23
    - repère de, 24
- Morita
  - contexte de, 43
- Mots réduits, 26
- Noyaux de Fejér, 22
- Opérateur
  - à adjoint, 23
  - compact, 23
  - compact lisse, 42
- Produit croisé généralisé, 30
  - lisse, 49
  - à croissance modérée, 50
  - admissible, 49
  - associé à un groupe de Lie, 38
  - modéré, 50
- Produit scalaire
  - à valeurs dans  $A$ , 23
- Produit tensoriel
  - d'applications, 19
  - intérieur, 24
  - projectif, 19
- $q$ -morphisme, 44
- QHM, 66
  - lisse, 74
  - trace, 69
- Quasi-homomorphisme, 44
  - associé, 47
  - minimal, 47
- Repère
  - de module hilbertien, 24
- Représentation
  - $C^*$ -algèbre associée, 25
  - covariante, 29
  - de  $C^*$ -correspondance, 25
    - action de jauge, 27
    - injective, 25
  - de bimodule hilbertien, 29
- Semi-exact
  - foncteur, 48
- Semi-norme, 18
  - base de, 18
  - produit tensoriel, 19
  - sous-multiplicative, 20
- Sous-algèbre lisse, 31
- Split exact
  - foncteur, 43
- Suite exacte

- linéairement scindée, 42
- scindée, 42
- Suspension lisse, 42
- Topologie projective, 19
- Tore non-commutatif, 73
- Twist
  - d'un module, 64
- Variété de Heisenberg
  - quantique, voir QHM